ELEMENTI
DI
MATEMATICA.

ELEMENTI
DI
MATEMATICA

Composti per uso della

REALE ACCADEMIA MILITARE

DAL PROFESSORE DI FISICA SPERIMENTALE, E CHIMICA, E DIRETTORE DELLE SCIENZE DELLA MEDESIMA

VITO CARAVELLI.

TOMO VIII.

IN NAPOLI MDCCLXXII.

PER GLI RAIMONDI

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

ELEMENTI

DI

MECCANICA.

INDICE

De' capi contenuti in questo tomo.

LIBRO I.

Della Dinamica.

LI-

LIBRO II.

Della Statica.

ELEMENTI

DI

MECCANICA

DEFINIZIONE.

1. Si dice in generale *Meccanica* la ſcienza, che tratta del moto, e dell' equilibrio de' corpi. In iſpezie poi ſi dicono *Dinamica* quella, ch' eſamina i moti de' corpi duri, *Statica* quella, che conſidera l' equilibrio de' medeſimi corpi, *Idroſtatica* quella, che tratta dell' equilibrio de' corpi fluidi, e finalmente *Idrodinamica* quella, ch' eſamina il moto de' fluidi.

AVVERTIMENTO I.

2. L' Idrodinamica prende il nome d' *Idraulica*, se il fluido, che si considera in moto, è l' acqua.

AVVERTIMENTO II.

3. Ne' corpi duri l' esame dell'equilibrio suppone quello del moto, e ne' fluidi l'esame del moto suppone quello dell' equilibrio. Perciò prima esporremo la *Dinamica*, e poscia successivamente tratteremo della *Statica*, dell' *Idrostatica*, e dell' *Idraulica*.

LI-

LIBRO I.

Della Dinamica.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

DEFINIZIONE I.

4. Si chiama *Maſſa* d'un corpo la ſomma delle parti di materia, dalle quali viene egli compoſto.

DEFINIZIONE II.

5. Si dice *Volume*, o *Mole* d' un corpo l' eſtenſione, che ha in lunghezza, l'arghezza, e profondità.

AVVERTIMENTO.

6. Le oſſervazioni, e l' eſperienze ci hanno fatto conoſcere che le parti della materia non ſi toccano ne' corpi in tutt' i loro

 pun-

punti, ma che hanno anzi tra di esse alcune vacuità, o sieno pori; li quali pori in alcuni corpi sono più, e in altri meno di numero, in alcuni di maggiore grandezza, e in altri di grandezza minore. Quindi deriva 1. che il volume d' un corpo eccede sempre quello della sua massa di quant' è la somma de' suoi pori; 2 che non tutt' i corpi sotto uguali volumi racchiudono masse uguali.

DEFINIZIONE III.

7. Si dicono due corpi *dell' istessa densità*, o *rarità*, se sotto a volumi uguali hanno masse uguali. Si dice poi un corpo essere due, tre, quattro volte, ec. *più denso*, o *più raro* d' un altro, se sotto a volumi uguali l' uno contiene due, tre, quattro volte, ec. più, o meno massa dell'altro, o se, contenendo masse uguali, il volume dell'uno è la metà, il terzo, il quarto, ec., o il doppio, il triplo, il quadruplo, ec. del volume dell' altro.

COROLLARIO I.

8. Essendo la densità d' un corpo il doppio, il triplo, il quadruplo, ec. della densità d' un altro, se, avendo volumi uguali, l' uno contiene due, tre, quattro volte, ec. più massa dell' altro, o se, avendo masse ugua-

uguali, il volume dell' uno è la metà, il terzo, il quarto, ec. del volume dell'altro. Saranno le densità di due corpi nella ragione diretta delle masse, se saranno uguali i volumi, e nella ragione reciproca de' volumi, se le masse saranno uguali. E perciò, se vi sarà disuguaglianza e nelle masse, e ne' volumi, la ragione delle densità sarà composta dalla diretta di quella delle masse, e dalla reciproca di quella de' volumi.

COROLLARIO II.

9. Quindi la ragione delle masse sarà composta dalla diretta di quella delle densità, e dalla reciproca della reciproca di quella de' volumi, vale a dire composta dalla diretta di quella delle densità, e dalla diretta di quella de' volumi.

COROLLARIO III.

10. Finalmente, essendo le masse in ragione composta dalla ragione delle densità, e dalla ragione de' volumi, ne segue 1. che la ragione de' volumi è composta dalla ragione diretta di quella delle masse, e dalla reciproca di quella delle densità; 2. che, se le masse sono uguali, la ragione delle densità è reciproca di quella de' volumi; 3. che, se la ragione delle densità è reciproca di quella de' volumi, le masse sono tra loro

uguali (§ 139 *del tom.* 4).

AVVERTIMENTO.

11. Ancorchè non sia determinabile la quantità assoluta della materia, che racchiude un corpo: nondimeno è sempre determinabile la ragione della quantità di materia d'un corpo alla quantità di materia di qualunque altro; anzi si può determinare la ragione delle quantità di materie di due corpi, o con determinare i loro pesi, a' quali le quantità di materie sono proporzionali, come appresso si dimostrerà, o con determinare la ragione composta da quella de' volumi, che si ha coll'ajuto della Geometria, e da quella delle densità, che si ha dagli pesi, che hanno sotto a volumi uguali, come si dimostrerà a suo luogo.

DEFINIZIONE IV.

12. Si dice *Luogo* d'un corpo la porzione dello spazio mondano, che occupa.

DEFINIZIONE V.

13. Si dice *Moto* quella forza, la quale, qualora è in un corpo, e non viene distrutta da altra uguale, e contraria, l'obbliga a mutare continuamente luogo.

AVVERTIMENTO.

14. Ancorchè non si comprenda che sia in se stesso il moto: nondimeno si conosce essero in un corpo, e animare le sue parti dalla continua mutazione di luogo, che s'osserva nell' istesso corpo. Or come alcune volte non è mutazione di luogo, che fa un corpo, ma semplice mutazione di sito per rispetto d'un altro, che realmente si muove, e di cui non s'avverte la mutazione di luogo; così alcune volte si crede aver moto un corpo, che realmente n'è privo.

DEFINIZIONE VI.

15. Si dice *Quiete* lo stato d' un corpo privo di moto.

AVVERTIMENTO I.

16. Si conosce la quiete de' corpi dal non vederli mutar luogo. Or come la mutazione di luogo talvolta non s' avverte; così talvolta si crede quieto un corpo, che realmente ha moto.

COROLLARIO I.

17. Essendo il moto una forza, non avendola un corpo quieto, non può da se co-

municarsela, e avendola un corpo, che si muove, non può da se nè diminuirsela, nè toglierfela; perchè è proprio delle forze il non poter essere diminuite, o estinte, se non dalle forze contrarie.

COROLLARIO II.

18. Quindi ogni corpo di sua natura persevera nello stato di quiete, s'è quieto, o di moto, se ha moto, senza punto diminuirselo, fin a tanto che non venghi da forze impressegli costretto a cambiarlo.

COROLLARIO III.

19. Conservandosi ogni corpo di sua natura nello stato di quiete, s' è quieto, o di moto, se ha moto, senza punto diminuirselo; è facile ad intendere che i corpi non sono di loro natura più proclivi alla quiete, che al moto, e ch' è indifferente per essi sì l'uno, che l'altro stato.

AVVERTIMENTO II.

20. Si noti che l' indifferenza de' corpi alla quiete, e al moto si chiama comunemente *Inerzia*. Quindi s' intende perchè i corpi si dicono di loro natura inerti.

DE-

DEFINIZIONE VII.

21. Si dice *Spazio* corso da un corpo, che si muove, la linea, per cui il corpo s'è trasferito.

DEFINIZIONE VIII.

22. Due corpi, che si muovono, si dicono *ugualmente veloci*, o *ugualmente celeri*, se in tempi uguali corrono spazj uguali. Si dice poi di due corpi, che si muovono, avere uno due, tre, quattro volte, ec. *più velocità*, o *celerità* dell'altro, se l' uno corre due, tre, quattro volte, ec. più spazio dell'altro nell'istesso tempo, o in tempi uguali, ovvero se nel correre uguali spazj uno v'impiega la metà, il terzo, il quarto, ec. del tempo, che v'impiega l'altro.

COROLLARIO.

23. Qualora un corpo ha moto, tutte le sue parti di materia corrono nell' istesso tempo spazj uguali. Dunque tutte le parti di materia hanno uguali celerità, e conseguentemente uguali forze, che l' animano. Per la qual cosa il moto in qualunque corpo si distribuisce ugualmente a tutte le parti della materia; e ciascuna per conseguenza ne ha la porzione denominata dal loro numero.

DE-

DEFINIZIONE IX.

24. Chiamiamo *Forza d' Inerzia* quella, per cui i corpi resistono alle cagioni, che producono il cambiamento del loro stato di quiete, o di moto.

AVVERTIMENTO I.

25. Le osservazioni, e l'esperienze manifestano la forza d'inerzia. In fatti quando un corpo, che si muove, fa azione su d'un altro, ch'è o in quiete, o in moto, s'osserva che non si muta lo stato di quiete, o di moto di quest'altro, senza che quello perda della sua forza, quanto ne comunica all'altro pel cambiamento dello stato; e conseguentemente s'osserva che nel tempo che il primo agendo comunica della forza al secondo, il secondo resistendo obbliga il primo a perdere altrettanta forza. Dunque i corpi nel cambiamento del loro stato resistono alle cagioni produttrici del cambiamento, e conseguentemente sono dotati della forza d'inerzia; la quale forza d'inerzia non fa altro, che impedire che segua cambiamento di stato, senza dispendio nelle cagioni di quelle forze, che comunicano per gli medesimi cambiamenti.

CO-

COROLLARIO I.

26. Dunque nel cambiamento di ſtato di un corpo non ſolamente v'interviene l'azione della cagione produttrice del cambiamento, ma ben anche l'azione contraria della forza d' inerzia del corpo; la quale azione contraria ſi chiama comunemente *Reazione*.

COROLLARIO II.

27. Eſſendo l'effetto dell' azione il moto, che ſi comunica al corpo dalla cagione produttrice del cambiamento, e l' effetto della reazione del corpo la forza, che ſi perde dalla cagione nell'atto dell' azione; ed eſſendo tali effetti uguali tra loro, uguali tra loro ſaranno anche l'azione della cagione, e la reazione del corpo. Sicchè all' azione, che una cagione fa ſu d' un corpo, dee ſempre corriſponderle una uguale reazione.

COROLLARIO III.

28. Eſſendo in oltre l'effetto dell' azione il moto, che la cagione comunica al corpo pel cambiamento del ſuo ſtato; ſarà sì fatto moto maggiore, o minore, e conſeguentemente maggiore, o minore il cambia-

biamento dello ſtato del corpo, ſecondochè maggiore, o minore ſarà la cagione. Onde ogni cambiamento, che accade nello ſtato d'un corpo è ſempre proporzionale alla cagione produttrice del cambiamento, e dee il cambiamento farſi per la direzione, per cui ſi fa l'azione.

COROLLARIO IV.

29. Eſſendo di più la forza d'inerzia quella forza, per cui i corpi reſiſtono alle cagioni produttrici de' cambiamenti de' loro ſtati di quiete, o di moto; ed eſſendo, qualora accade cambiamento nello ſtato d'un corpo, uguale il cambiamento in tutte le parti della ſua materia: ne ſegue che nel cambiamento di ſtato d'un corpo tutte le ſue parti di materia eſercitano forze uguali d'inerzia. E perciò la forza d'inerzia, ch' eſercita l'intero corpo, non è, ſe non la ſomma delle forze uguali eſercitate dalle ſue parti.

COROLLARIO V.

30. Corriſpondendo ſempre all' azione una uguale reazione; creſcerà queſta a proporzione, che creſcerà quella. Dunque l'azione della forza d'inerzia d'un corpo creſce a proporzione, che creſce l'azione della cagione produttrice del cambiamento del ſuo ſta-

ſtato, e conſeguentemente a proporzione della forza comunicata all' iſteſſo corpo pel detto cambiamento di ſtato. E perciò la forza d' inerzia eſercitata da un corpo in un cambiamento di ſtato ſta alla forza d' inerzia eſercitata in un altro cambiamento di ſtatò, come la forza comunicatali pel primo cambiamento alla forza comunicatali pel cambiamento ſecondo.

COROLLARIO VI.

31. Quindi, ſe due corpi per gli cambiamenti de' loro ſtati ricevono forze proporzionali alle loro quantità di materia, le forze d' inerzie, ch' eſercitano in sì fatti cambiamenti, ſono pure alle quantità delle loro materie proporzionali.

AVVERTIMENTO II.

32. Si noti che, qualora un corpo col ſuo moto fa azione ſu d'un altro, e queſt' altro conſeguentemente colla ſua forza d' inerzia fa ſu quello un' uguale reazione, ceſſano sì fatte azioni reciproche (il che accade in un momento) in che uno de' corpi pel moto acquiſtato, e l' altro pel moto avanzatoli divengono ugualmente veloci; perchè, reſi i corpi d' uguali velocità, uno non può più ſpingere l' altro,

COROLLARIO VII.

33. Sicchè nell' azione d' un corpo ſu d' un altro l' agente non comunica all' altro, ſe non tanto del moto ſuo, quant' è neceſſario, perchè vadano ambidue dopo l' azione con uguali velocità. E perciò tutt' il moto, che dopo l' azione è ne' corpi, è ugualmente diſtribuito a tutte le parti della materia d' ambidue; e conſeguentemente la quantità di moto, che ne avrà uno, ſarà a quella, che ne avrà l'altro, come la quantità di materia dell' uno alla quantità di materia dell' altro.

AVVERTIMENTO III.

34. Si noti però che, ſe il corpo, che riceve l'azione è quieto, allora l'intero moto dell' agente è quello, che ugualmente ſi diſtribuiſce a tutte le parti della materia d' ambi i corpi. Onde la ſomma de' moti, che v' è ne' corpi dopo l' azione, uguaglia il moto, che aveva l' agente prima. Se poi i corpi ſi muovono ambidue verſo l' iſteſſa parte; in tale caſo il di più di moto dell' agente, che lo rende più veloce dell' altro, è quello, che ugualmente ſi diſtribuiſce a tutte le parti della materia d'ambi i corpi; reſtando tutto l' altro moto dopo l' azione ne' medeſimi corpi, ne' quali era prima.

Sic-

Sicchè anche in quest' altro caso la somma de' moti, che hanno i corpi dopo l'azione uguaglia la somma di quelli, che ne avevano prima. Se finalmente i corpi si muovono verso parti opposte; in sì fatto caso quel, che v' è di più di moto nell'agente, che non viene distrutto dal moto contrario, è quello, che ugualmente si distribuisce a tutte le parti della materia d' ambi i corpi. E perciò in quest' ultimo caso la somma de' moti, che hanno i corpi dopo l'azione, uguaglia la differenza di quelli, che avevano prima.

AVVERTIMENTO IV.

35. Fin qui abbiamo considerato intervenirvi nell'azione di due corpi solamente il moto di uno, o di tutti e due i corpi, e la forza d'inerzia; ma se v'interviene anche qualch' altra forza, che s' opponga al moto, che l' agente comunica all' altro corpo; allora o la forza dell' agente, se non è maggiore della forza opposta, viene nell' azione interamente distrutta, o s'è maggiore, non si distribuisce ugualmente ad ambi i corpi, se non il di più di forza, che v' è nell' agente.

DE-

DEFINIZIONE X.

36. Si dicono *Forze motrici* quelle, che comunicano moti agli corpi.

AVVERTIMENTO.

37. Si noti che di alcune forze motrici le azioni su corpi sono instantanee, di altre sono continue. Le prime comunicano moti a' corpi, su quali fanno le loro azioni, o distruggono in essi moti contrarj in modo, che gli acquisti, o le perdite di moti non ricevono da esse dopo il momento dell'azione accrescimento alcuno; le seconde poi comunicano pure, o distruggono moti in modo, che gli acquisti, o le perdite, che ne fanno i corpi, ricevono da momento in momento continui accrescimenti.

COROLLARIO.

38. Quindi i moti, che generano, o ch'estinguono le forze della prima spezie, sono proporzionali alle medesime forze. I moti poi, che generano, o estinguono le forze della seconda spezie, qualora sono costanti, cioè che in ogni momento replicano le medesime azioni, sono in ragione composta dalla ragione delle forze, e dalla ragione de' tempi, ne' quali i moti vengono generati,

rati, o estinti. E perciò le dette forze sono tra loro in ragione composta dalla diretta de' moti generati, o estinti, e dalla reciproca de' tempi, ne' quali sono generati, o estinti.

DEFINIZIONE XI.

39. Si dice *Direzione* d'una forza, o d'un moto la linea retta, per la quale la forza fa la sua azione, o un corpo riceve il moto.

DEFINIZIONE XII.

40. Il moto acquistato da un corpo si dice *semplice*, o *composto*, secondochè è prodotto da una forza motrice, o da più, che vi fanno insieme azioni.

DEFINIZIONE XIII.

41. Il moto d'un corpo si dice *equabile*, se si conserva sempre l'istesso, e conseguentemente il corpo conserva sempre l'istessa velocità; si dice poi *variabile*, se continuamente si muta, e per conseguenza il corpo continuamente muta la sua velocità.

DEFINIZIONE XIV.

42. Il moto variabile si dice *accelerato*, o ri-

o *ritardato*, secondochè si va continuamente accrescendo, o diminuendo, e conseguentemente si va accrescendo, o diminuendo la velocità del corpo.

AVVERTIMENTO I.

43. Se una, o più forze motrici fanno azioni su d'un corpo una sola volta, e in un'istesso istante, il moto comunicato al corpo da tali forze nel momento delle loro azioni, non ricevendo più da esse alterazione alcuna, nè circa la sua grandezza, nè circa la sua direzione, deve essere equabile, e rettilineo; purchè però il corpo si muova senza incontrare resistenza alcuna, o sia forza contraria, che vada continuamente diminuendolo. Se poi il detto moto viene del modo già detto continuamente diminuito, è allora non equabile, ma ritardato. Se finalmente il moto in un corpo è prodotto da una forza motrice, la quale replica in ogni momento la sua azione, sì fatto moto è accelerato; purchè però il corpo non incontri resistenza alcuna, o, se l'incontra, sia minore la diminuzione, che in ogni momento ne produce la resistenza, dell'accrescimento, che ne produce la forza motrice.

AVVERTIMENTO II.

44. Si noti di più che il moto accelera-

ra-

rato d' un corpo, prodotto da una ſola forza motrice, che replica in ogni momento la ſua azione, può divenire equabile, ſe il corpo ſi muove incontrando continuamente reſiſtenza, e reſiſtenza, che va continuamente creſcendo, finchè giugne a fare un' azione uguale a quella della forza motrice. Perchè dal momento, che le dette azioni divengono uguali, quanto nuovo moto introduce l' una nel corpo, altrettanto l' altra ne diſtrugge. Onde da tale momento il moto nel corpo non riceve ulteriore accreſcimento, e conſeguentemente da accelerato ſi fa equabile.

DEFINIZIONE XV.

45. Il moto sì accelerato, che ritardato ſi dice *uniformemente accelerato*, o *uniformemente ritardato*, ſe il guadagno, o la perdita di velocità, che ſi va ſucceſſivamente facendo, s' accreſce a proporzione del tempo.

CAP. I.

Delle leggi fondamentali, che osservano i corpi ne' moti equabili.

TEOR. I.

46. *Se due corpi si muovono equabilmente, e corrono in tempi disuguali spazj anche disuguali; le loro velocità sono in ragione composta dalla diretta degli spazj, e dalla reciproca de' tempi.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo ne' moti equabili la velocità d'un corpo il doppio, il triplo, il quadruplo, ec. della velocità d'un altro, se lo spazio corso da uno è il doppio, il triplo, il quadruplo, ec. dello spazio corso dall' altro nell' istesso tempo, o se, in correre spazj uguali, l' uno impiega la metà, il terzo, il quarto, ec. del tempo, che v' impiega l' altro (§22). Saranno le velocità di due corpi mossi equabilmente, qualora saranno uguali i tempi, nella ragione diretta degli spazj corsi; e, qualora saranno uguali i detti spazj, nella ragione re-

reciproca de' tempi. E perciò, qualora sono disuguali e gli spazj corsi, e i tempi impiegati in correrli, le velocità sono in ragione composta dalla diretta degli spazj corsi, e dalla reciproca de' tempi impiegati in correrli. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

47. Dunque, se i tempi sono uguali, le velocità sono in ragione diretta degli spazj corsi; e, se gli spazj corsi sono uguali, le velocità sono in ragione reciproca de'tempi.

COROLLARIO II.

48. Essendo le velocità in ragione composta dalla diretta di quella degli spazj, e dalla reciproca di quella de' tempi; sarà la ragione degli spazj composta dalla diretta di quella delle velocità, e dalla reciproca della reciproca di quella de' tempi, vale a dire composta dalla diretta di quella delle velocità, e dalla diretta di quella de' tempi, e conseguentemente uguale alla ragione de'prodotti delle velocità moltiplicate per gli tempi (§ 138 *del tom.* 1).

COROLLARIO III.

49. Quindi gli spazj corsi saranno nella ragione de' tempi, se le velocità saranno uguali.

COROLLARIO IV.

50. Eſſendo in oltre i ſpazj corſi in ragione compoſta dalla diretta di quella delle velocità, e dalla diretta di quella de' tempi; ne ſegue 1°. che, ſe le velocità ſono nella ragione de' tempi, gli ſpazj ſono nella ragione de' quadrati delle velocità, o de' tempi; 2°. che i tempi ſono in ragione compoſta dalla diretta di quella degli ſpazj, e dalla reciproca di quella delle velocità; 3°. che, ſe le velocità ſono in ragione reciproca de' tempi, i ſpazj ſono uguali.

AVVERTIMENTO.

51. Si noti che, ſe ſi trova avere la velocità d'un corpo a quella d'un altro la ragione di 9 : 7 per eſempio, ſi dice eſſere la velocità del primo di 9 gradi, e la velocità del ſecondo di gradi 7. Onde i gradi di velocità non hanno niente di aſſoluto.

T E O R. II.

52. *Se due corpi ſi muovono equabilmente, le quantità de' moti, che hanno, ſono tra loro in ragione compoſta dalla diretta di quella delle maſſe, e dalla diretta di quella delle velocità.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo il moto in qualunque corpo ugualmente distribuito a tutte le parti della materia (§ 23). Se due corpi si muovono equabilmente, la quantità di moto di uno deve essere alla quantità di moto dell' altro in ragione composta da quella della forza, che anima una parte di materia di uno, alla forza, che anima una parte di materia dell' altro, e da quella del numero delle parti di materia di uno al numero delle parti di materia dell' altro. Ma la prima di sì fatte ragioni componenti è uguale alla ragione delle velocità delle medesime parti, e conseguentemente de' corpi, e la seconda è uguale alla ragione delle masse. Dunque, se due corpi si muovono di moto equabile, le quantità de' moti sono in ragione composta da quella delle masse, e da quella delle velocità. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

53. Essendo i moti in ragione composta da quella delle masse, e da quella delle velocità; ne segue 1°. che le quantità de' moti sono tra loro nella ragione de' prodotti delle masse moltiplicate per le rispettive velocità (§138 *del tom* 1); 2°. che le quantità de'

moti, ſe le velocità ſono uguali, ſono nella ragione delle maſſe, e ſe ſono uguali le maſſe, ſono nella ragione delle velocità; 3°. che le velocità ſono in ragione compoſta dalla diretta di quella de' moti, e dalla reciproca di quella delle maſſe, e conſeguentemente nella ragione de' moti diviſi per le maſſe (§ 143 *del tom.* 1); 4° che le maſſe ſono in ragione compoſta dalla diretta di quella delle quantità de' moti, e dalla reciproca di quella delle velocità; 5° finalmente che, ſe i moti ſono uguali, la ragione delle velocità è reciproca di quella delle maſſe; e, ſe la ragione delle velocità è reciproca di quella delle maſſe, le quantità de' moti ſono tra loro uguali (§ 139 *del tom.* 4).

COROLLARIO II.

54. In oltre, eſſendo le velocità in ragione compoſta dalla diretta di quella degli ſpazj corſi; e dalla reciproca di quella de' tempi (§ 46); ſaranno pure le quantità de' moti in ragione compoſta dalle dirette di quelle delle maſſe, e degli ſpazj corſi, e dalla reciproca di quella de' tempi.

COROLLARIO III.

55. Eſſendo di più le maſſe in ragione compoſta da quella delle denſità, e da quel-

quella de' volumi (§ 9) ; saranno anche le quantità de' moti in ragione composta dalle dirette di quelle delle densità, de' volumi, e degli spazj corsi, e dalla reciproca di quella de' tempi.

AVVERTIMENTO I.

56. I due precedenti corollarj ne somministrano molti altri, che si tralasciano, potendoseli ognuno con facilità da se ricavare.

AVVERTIMENTO II.

57. Si noti di più che, se si trova avere la quantità di moto d'un corpo alla quantità di moto d'un altro corpo la ragione di 9 : 7 per esempio, si dice essere il moto del primo corpo di 9 gradi, e 'l moto del secondo di gradi 7. Onde i gradi di moto neppure hanno niente d'assoluto.

CAP.

CAP. II.

Della teorica del moto composto equabile, e rettilineo, e della composizione, e risoluzione delle forze produttrici di tali moti.

DEFINIZIONE I.

58. Si dicono *Forze conspiranti* quelle, che spingono insieme un corpo per l' istessa direzione; *Forze opposte* quelle, che insieme lo spingono per direzioni contrarie; e *Forze di mezzana conspirazione, e opposizione* quelle, che insieme lo spingono per direzioni, che formano angolo tra loro.

DEFINIZIONE II.

59. Se vi sono due, o più forze, le quali, facendo azioni in un istesso instante su d'un corpo, comunicano al medesimo un moto per una direzione, e v'è un' altra forza valevole a produrre nel medesimo corpo l' istesso moto, e per l' istessa direzione; si diranno allora questa per rispetto di quelle *Forza composta*, e quelle per rispetto di questa *Forze componenti*. AV-

AVVERTIMENTO.

60. Si noti che considereremo sempre i corpi muoversi senza incontrare resistenza alcuna, che possa a poco a poco diminuire i moti, e finalmenue estinguerli; riserbandoci di considerare gli effetti delle resistenze su corpi, che si muovono, a luogo opportuno.

TEOR. III.

61. *Facciano due forze motrici P, e Q,* Fig. 1. *di mezzana cospirazione, e opposizione, e proporzionali alle rette PA, QA, azioni nell' istesso istante, e una sola volta sul corpo A, secondo le direzioni PA, QA. Si prolunghino PA, QA in B e C in modo, che AB, AC sieno spazj, che A correrebbe in tempi uguali, se le dette forze facessero separatamente le loro azioni; e, compito il parallelogrammo BC, si tiri in esso la diagonale AD. Dico che A col moto composto correrà per la diagonale AD, e che correrà l'intera diagonale AD nel medesimo tempo, che correrebbe AB spinto dalla sola forza P, o AC spinto dalla sola forza Q.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Si supponga essere gli spazj da corrersi da A in un istante la retta AL, se venisse spinto dalla sola forza P, e la retta AM, se venisse spinto dalla sola forza Q. Facendo insieme azioni le forze P, e Q, e non potendo l'una impedire l'effetto dell' altra, non trovandosi tra loro opposte, in un istante si dovrà A trovare per una forza allontanato da QC per quanto n' è lontano il punto L, e per l' altra forza allontanato da PB per quanto n' è lontano il punto M. Ma in qualunque momento il corpo si deve trovare in un solo punto. Dunque nella fine del primo istante si deve trovare in un solo punto, e conseguentemente nel punto O, ch'è distante da QC, PB per quanto ne sono rispettivamente distanti i punti L, e M. Or, essendo equabile tanto il moto, che avrebbe A per AB, spinto dalla sola forza P, quanto quello, che avrebbe per AC, spinto dalla sola forza Q; sarà alla ragione de' tempi, che per una delle dette forze correrebbe AL, AB, e per l'altra correrebbe AM, AC, uguale sì la ragione di AL : AB, che quella di AM : AC. Dunque AL : AB = AM : AC (§ 245 *del tom.* 2); e, permutando, sta AL : AM = AB : AC. Onde il parallelogrammo LM è intorno la diagonale del paral-

le-

lelogrammo BC (§309 *del tom.2*), e conſeguentemente il punto O, in cui ſi deve trovare il corpo pel moto compoſto nella fine del primo iſtante, è nella diagonale AD. Similmente ſi dimoſtra che in ogni altro momento il corpo A pel moto compoſto ſi deve trovare nella medeſima diagonale AD, e che nel tempo, che ſi dovrebbe trovare in B, ſpinto dalla ſola forza P, o in C, ſpinto dalla ſola forza Q, pel moto compoſto ſi deve trovare in D. Per la qual coſa il corpo A, ſpinto inſieme dalle forze P, e Q, corre per la diagonale AD, e corre l' intera diagonale AD nel medeſimo tempo, che correrebbe AB, ſpinto dalla ſola forza P, o AC, ſpinto dalla ſola forza Q. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

62. Quindi la velocità, con cui ſi muove A, ſpinto da ambe le forze P, e Q inſieme, ſta alla velocità, che avrebbe, ſpinto da una di eſſe P, o Q, come la diagonale AD al lato AB, o AC; e conſeguentemente la velocità di A, ſpinto da ambe le dette forze inſieme, ſta alla ſomma di quelle, che avrebbe, ſe ſeparatamente vi faceſſero azioni le medeſime forze, come la diagonale AD alla ſomma de' lati AB, AC, o AB, BD.

CO-

COROLLARIO II.

63. E perciò il moto composto di A, spinto dalle due forze P, e Q insieme, sta alla somma de' moti, che avrebbe, se le medesime forze vi facessero separatamente le loro azioni, pure come la diagonale AD alla somma de' lati AB, BD.

COROLLARIO III.

64. Quindi, essendo la diagonale AD minore della somma de' lati AB, BD, e tanto più minore, quanto più è minore l'angolo ABD, e conseguentemente maggiore l'angolo BAC; saranno la velocità, e 'l moto di A, spinto da ambe le forze P, e Q insieme, minori rispettivamente delle somme delle velocità, e de' moti, che avrebbe, se separatamente vi facessero azioni le medesime forze, e tanto più minori, quanto più sarà maggiore l'angolo BAC.

COROLLARIO IV.

65. Se l'angolo BAC diviene nullo, nel qual caso le forze P, e Q divengono cospiranti, e fanno azioni ambedue per AD; in tale caso si fa AD uguale alla somma di AB, BD. E perciò la velocità, e 'l moto di A, spinto da ambe le forze P, e Q insie-

ſieme, qualora tali forze ſono coſpiranti, uguagliano riſpettivamente la ſomma delle velocità, e de' moti, che avrebbe, ſe ſeparatamente vi faceſſero azioni le medeſime forze; e la direzione di sì fatto moto compoſto è l'iſteſſa di quella delle forze coſpiranti.

COROLLARIO V.

66. Se poi, col creſcere dell'angolo BAC, le AB, AC vengono a formare una retta continuata; allora le forze P, e Q divengono oppoſte, e, cadendo BD ſu BA, la AD ſi fa uguale alla differenza di BA,BD, o di BA, AC. Sicchè la velocità, e'l moto di A, ſpinto da ambe le forze P, e Q inſieme, qualora tali forze ſono oppoſte, uguagliano riſpettivamente la differenza delle velocità, e de' moti, che avrebbe, ſe ſeparatamente vi faceſſero azioni le medeſime forze; e la direzione di sì fatto moto compoſto è l' iſteſſa della direzione della maggiore delle forze oppoſte.

COROLLARIO VI.

67. In oltre la forza P ſta alla forza Q, come il moto, che A avrebbe per AB, al moto, che avrebbe per AC. Ma tali forze ſono nella ragione di PA : QA, e rali moti nella ragione di AB: AC. Dunque

que AP: AQ = AB: AC. E perciò, compito il parallelogrammo PQ, farà PQ simile a BC (§ 106 *del tom.* 2), e conseguentemente la diagonale DA prolungata passerà per R.

COROLLARIO VII.

68. Si supponga essere R un'altra forza, che faccia in un istante azione su di A per la direzione RA, ed essere R : P = RA : AP. Essendo, per la simiglianza de' triangoli RAP, DAB, la RA : AP = DA : AB; sarà R: P = AD: AB, e perciò come il moto di A, spinto da ambe le forze P, e Q insieme, al moto di A, spinto dalla sola forza P. Dunque la sola forza R può comunicare ad A per la diagonale AD l'istesso moto, che li comunicano le due P, e Q insieme. Onde R è la forza composta, e P e Q sono le sue componenti (§ 59).

COROLLARIO VIII.

69. Quindi, se i lati PA, QA del parallelogrammo PQ contressegnano le direzioni, e l'efficacie di due forze componenti, la diagonale RA contrassegnerà la direzione, e l'efficacia della forza composta; e all'opposto se la direzione, e l'efficacia d'una forza viene contrassegnata dalla retta RA; de-

descrivendo intorno a RA, come diagonale, il parallelogrammo PQ, i suoi lati PA, QA contrassegneranno le direzioni, e l'efficacie delle sue componenti.

AVVERTIMENTO I.

70. Si noti che, potendosi intorno ad AR, come diagonale, descrivere infiniti diversi parallelogrammi, la forza disegnata da RA sarà sempre l' istessa, ma le due sue componenti potranno ricevere infinite variazioni e nelle loro efficacie, e nelle loro direzioni.

COROLLARIO IX.

71. E perciò, date le direzioni, e l'efficacie di due forze componenti, è data anche la direzione, e l' efficacia della loro forza composta; data poi la direzione, e l' efficacia d'una forza sola, non sono anche date le direzioni, e l' efficacie delle due sue componenti, ma si possono all' infinito ad arbitrio variare. Per la qual cosa possono i Meccanici in vece di due forze componenti sostituire la loro composta, e in vece di una forza sola sostituirne due per le direzioni, che il bisogno l'esige, purchè sieno sue componenti.

COROLLARIO X.

72. Essendo di vantaggio la forza composta R alla somma delle sue componenti P, e Q, come la diagonale RA alla somma de' lati AP, AQ, o AP, PR; sarà la forza composta R minore sempre della somma delle sue componenti P e Q, e tanto più minore, quanto più sarà minore l'angolo APR, o sarà maggiore l'angolo QAP.

COROLLARIO XI.

73. Si facciano i rettangoli FE, GH. Saranno per la simiglianza de' triangoli AFP, RGQ, e per l' uguaglianza de' lati AP, RQ, il lato AF = RG, e PF=QG, e conseguentemente EA = AH. Disegnando PA la direzione, e l'efficacia della forza P, disegneranno FA, EA le direzioni, e l' efficacie delle sue componenti. Similmente GA, HA disegnano le direzioni, e l'efficacie delle componenti della forza Q. Onde nel fare azioni insieme le forze P, e Q sul corpo A, la prima di esse comunica ad A il moto, che li comunicherebbero insieme le forze disegnate da FA, EA, e la seconda il moto, che li comunicherebbero insieme le forze disegnate da GA, HA. Ma le forze disegnate da EA, HA si distruggono scambievolmente, essendo uguali, e opposte. Dunque nel fare P, e Q insieme azioni sul corpo A, la prima di esse tan-

tanto moto comunica ad A, quanto ne li comunicherebbe la sola forza disegnata da FA, e la seconda, quanto ne li comunicherebbe la sola disegnata da GA. E perciò nel fare insieme azioni P, e Q sul corpo A, porzioni di esse scambievolmente si distruggono, e porzioni comunicano ad A per AD il moto; e la forza intera P sta alla parte, che non si distrugge nell' azione, ma che contribuisce al moto di A per AD, come PA : FA, o come il seno massimo al coseno dell' angolo PAF, o dell'angolo BAD, formato dalla direzione della forza P, e dalla direzione del moto composto.

COROLLARIO XII.

74. Similmente si dimostra essere l'intera forza Q alla sua porzione, che non si distrugge nell' azione, e che contribuisce al moto di A per AD, come QA : GA. Dunque la somma delle forze P, e Q sta alla somma delle loro porzioni, colle quali comunicano il moto ad A per AD, come la somma di PA, QA alla somma di FA, GA, o di RG, GA, ovvero come la somma di PA, QA alla sola RA. Quindi s' intende perchè l'effetto della forza composta sia l'istesso di quello delle sue componenti, ancorchè quella sia minore della somma di queste; e s' intende altresì perchè le forze, che fanno azioni per direzioni, che forma-

no qualunque angolo tra loro, dette si sieno di mezzana cospirazione, e opposizione.

AVVERTIMENTO II.

Fig. 2. 75. Si noti che se fanno azioni insieme sul corpo O non due, ma più forze A, B, C, D, E, e le rette AO, BO, CO, DO, EO disegnano le loro direzioni, ed efficacie; si può trovare la direzione, ed efficacia della forza composta da tutte, cioè che produce sola l' istesso effetto sul corpo O, che tutte le dette insieme, a questo modo. I. Si faccia il parallelogrammo AOBE, e si tiri in esso la diagonale OE. II. Si faccia il parallelogrammo EOCF, e si tiri in esso la diagonale OF. III. Si faccia l' altro parallelogrammo FODG, e si tiri in esso la diagonale OG. IV. Finalmente si faccia il parallelogrammo GOEH, e si tiri in esso la diagonale OH. Contrassegnerà OH la direzione, e l' efficacia della detta forza composta. Imperciocchè tanto effetto produce nel corpo O la forza, la cui direzione, ed efficacia è disegnata da EO, quanto ne producono le forze A, e B insieme. Similmente tanto effetto produce in O la forza, la cui direzione, ed efficacia è disegnata da FO, quanto ne producono insieme le forze, l' efficacie e direzioni delle quali sono disegnate da EO, CO,

CO, e confeguentemente le forze A, B, C infieme. Dell' ifteffo modo fi dimoftra che tanto effetto produce in O la forza, la cui direzione, ed efficacia è difegnata da GO, quanto ne producono le forze A, B, C, D infieme; e che tant'effetto produce in O la forza, la cui direzione, ed efficacia è difegnata da HO, quanto ne producono tutte le forze infieme A, B, C, D, E. E perciò la forza, la cui direzione, ed efficacia è difegnata da HO, è la compofta da tutte le forze A, B, C, D, E.

AVVERTIMENTO III.

76. Si può determinare la direzione, ed efficacia della forza compofta da tutte le forze A, B, C, D, E anche coll' ajuto della Trigonometria, qualora fono note le lunghezze delle rette AO, BO, CO, DO, EO, e fono noti gli angoli, che formano le medefime rette. In fatti, effendo noto l' angolo AOB, è noto anche OAE. Noti dunque nel triangolo OAE i lati OA, AE, e l' angolo OAE, fi determinano la bafe OE, e l' angolo AOE. Effendo in oltre noti gli angoli AOC, AOE, è noto anche l' angolo EOC, e confeguentemente l' angolo OEF. Noti dunque nel triangolo OEF i lati OE, EF, e l' angolo OEF, fi determinano la bafe OF, e l' angolo EOF. Similmente, effendo noto sì l' angolo AOD,

che l'angolo AOF, somma degli due AOE, EOF, noto sarà pure l'angolo FOD, e conseguentemente l'angolo OFG. Sicchè, noti nel triangolo OFG i lati OF, FG, e l'angolo OFG, si determinano la base OG, e l'angolo FOG. Finalmente, essendo noto sì l'angolo AOE, che AOG, somma degli angoli AOE, EOF, FOG, noto è anche l'angolo GOE, e conseguentemente l'angolo OGH. Onde, noti nel triangolo OGH i lati OG, GH, e l'angolo OGH, si determinano l'angolo GOH, e la retta OH, e conseguentemente si determina la direzione, ed efficacia della detta forza composta.

AVVERTIMENTO IV.

77. Si noti finalmente che dell' istesso modo, qualora OA, OB, OC, OD, OE dinotano gli spazj, che O correrebbe equabilmente in tempi uguali, spinto separatamente da altrettante forze, si può determinare la retta OH, che contrassegna la direzione, e lo spazio, che in altrettanto tempo con moto composto deve correre, qualora è spinto da tutte le medesime forze insieme.

CAP.

C A P. III.

Delle leggi della distribuzione de' moti tra' corpi ne' loro urti.

DEFINIZIONE I.

78. Si dice *Urto*, o *Percussione* l'azione, che fa un corpo col moto, che ha, su d'un altro, che incontra.

AVVERTIMENTO.

79. Tre casi possono accadere nell'urto. Può un corpo, che si muove, urtare un altro quieto; e questo appresso si dirà *primo caso dell'urto*. Possono anche due corpi urtarsi, mentre ambidue si muovono per l'istessa direzione; e questo si chiamerà *secondo caso dell'urto*. Possono finalmente due corpi urtarsi, mentre si muovono per direzioni opposte; e questo il diremo appresso *terzo caso dell'urto*.

DEFINIZIONE II.

80. Si dirà un corpo urtare *direttamente*, o *obbliquamente* un altro, secondochè si muo-

verà per una retta perpendicolare, o obbliqua al piano tangente d' ambi i corpi nel luogo dell' urto.

AVVERTIMENTO.

81. Si noti che nell' urto le parti d' alcuni corpi si piegano, e, cessato l' urto, di nuovo da se medesime si spiegano; le parti d' alcuni altri non si piegano affatto; e finalmente le parti di altri si piegano sì, ma non si spiegano poi, cessato l' urto.

DEFINIZIONE III.

82. I corpi, le parti de' quali nell'urto si piegano, e, cessato l' urto, di nuovo si spiegano, si dicono *corpi elastici*; tutti gli altri si chiamano *corpi non elastici*. E la forza, per cui si spiegano le parti de' corpi elastici, piegate prima nell' urto, si dice *Elasticità*, o *Forza elastica*.

DEFINIZIONE IV.

83. Se le parti d' un corpo elastico con tanta forza si spiegano, con quanta sono state piegate, la forza si dice *elasticità perfetta*, e 'l corpo si dice *perfettamente elastico*. Se poi le parti d' un corpo elastico si spiegano con forza minore di quella, che le ha piegate, la forza allora si dice *elasticità imper-*

perfetta, e 'l corpo si dice *imperfettamente elastico*.

AVVERTIMENTO I.

84. Si noti che de' corpi non elastici si dicono *perfettamente duri* quelli, le parti de' quali per qualunque potente urto non si piegano affatto; *perfettamente molli* quelli, le parti de' quali per qualunque debile urto si piegano; e *imperfettamente duri*, o *imperfettamente molli* quelli, le parti de' quali non manifestano sensibile piegamento, se non ricevono urto efficace.

AVVERTIMENTO II.

85. Già s'è detto che nell'urtarsi insieme due corpi l'azione dell'uno, e la reazione dell'altro cessano, in che i corpi sono resi ugualmente veloci, e conseguentemente in che il moto, che non si distrugge nell' urto, se pur ve n' è, che si distrugga, si trova ugualmente distribuito in ambi i corpi. Or, se i corpi non sono elastici, non avendo forza, che possa su di essi, cessato l'urto, fare altra azione; la distribuzione di moto, risultata dalle dette loro reciproche azioni, deve conservarsi dopo l' urto senza alterazione alcuna. Ma, se i corpi sono elastici; perchè, cessate le dette azioni reciproche, le forze elastiche de' corpi, spiegando

le

le parti piegate, fanno nuove azioni su di essi. Perciò la distribuzione di moto, risultata nel primo istante dell' urto dalle dette azioni reciproche, deve nell' istante seguente a cagione delle nuove azioni delle forze elastiche ricevere alterazione. Onde i corpi non elastici dopo l' urto debbono muoversi co' moti, che risultano dall' azione dell' uno, e dalla reazione uguale dell' altro; laddove i corpi elastici debbono muoversi cogli medesimi moti, alterati però dalle loro forze elastiche.

AVVERTIMENTO III.

Fig. 3. 86. Per intendere intanto in che modo le forze elastiche alterano i detti moti, sieno P, e Q due corpi d' uguali forze elastiche, e P urti Q spingendolo verso B. Il corpo P colla sua azione, piegando le parti di Q, comunica all' istesso Q porzione del di lei moto; e Q colla sua reazione, piegando le parti di P, estingue in P altrettanto del moto suo. Seguite sì fatte reciproche azioni, le forze elastiche sforzano allo spiegamento le parti piegate, cioè l' elasticità di P sforza le parti di P a spiegarsi ugualmente verso A, e verso C, e l' elasticità di Q sforza le parti di Q a spiegarsi ugualmente verso A, e verso B. Dunque le metà delle forze elastiche de' due corpi P e Q sforzano le loro parti a spiegarsi ver-

verſo A, e le altre metà le sforzano a ſpiegarſi riſpettivamente verſo C, e verſo B. Ma lo ſpiegamento delle parti verſo A è impedito dall' uguaglianza degli sforzi oppoſti. Sicchè ſi ſpiegano interamente le parti di P da A verſo C, e quelle di Q da A verſo B. E perciò l' intera elaſticità di Q al moto dell' iſteſſo Q verſo B ne aggiugne, quanto l' intero ſuo sforzo può comunicarli, e l' intera elaſticità di P diſtrugge dal moto dell' iſteſſo P verſo B, quanto l' intero ſuo sforzo può comunicarli per direzione oppoſta da A verſo C.

AVVERTIMENTO IV.

87. So che i Meccanici comunemente ſi ſono immaginati ſpiegarſi le parti di Q da A verſo C, e le parti di P da A verſo B; però non hanno badato che, ſe in sì fatto modo ſeguiſſe lo ſpiegamento delle parti, le forze elaſtiche ſarebbero oppoſte, e l'una diſtruggerebbe l' effetto dell' altra. A tale errore ſi debbono attribuire la difficoltà provata in iſcovrire le leggi della diſtribuzione del moto tra corpi perfettamente elaſtici nell' urto, concordi colla natura, e l' oſcurità de' metodi praticati per iſcoprirle; obbligati di naſcondere nell' oſcurità de' metodi il loro errore.

PRO.

PROBL. I.

88. *Date le masse, e le velocità, che hanno due corpi non elastici prima dell' urto diretto, determinare la velocità comune, che avranno dopo l' urto.*

SOLUZIONE.

Contrassegnino M, e m le masse de' due corpi, V, e *v* le velocità, che hanno prima dell' urto, e *x* la velocità comune, che avranno dopo l'urto; contrassegneranno MV, mv i moti, che hanno prima dell' urto (§ 53). Essendo i corpi privi d' elasticità, sarà la somma de'moti d'ambidue dopo l'urto = MV nel primo caso dell'urto, in cui si suppone v = o, e conseguentemente mv = o, ed = MV+mv nel secondo caso dell' urto, ed = MV — mv nel terzo caso dell' urto (§ 34). E perciò nel primo caso dell'urto sarà $x = \frac{MV}{M+m}$, nel secondo caso sarà $x = \frac{MV+mv}{M+m}$, e nel terzo caso sarà $x = \frac{MV-mv}{M+m}$. Ch' è quanto bisognava determinare.

CO-

COROLLARIO I.

89. Quindi il moto del corpo di massa M dopo l'urto sarà contrassegnato nel caso dell'urto

$$\text{I}^{\circ}\text{. da } \frac{M^2 V}{M+m}$$

$$\text{II}^{\circ}\text{. da } \frac{M^2 V+Mmv}{M+m}$$

$$\text{III}^{\circ}\text{. da } \frac{M^2 V-Mmv}{M+m}.$$

Il moto del corpo di massa *m* dopo l'urto sarà contrassegnato nel caso dell'urto

$$\text{I}^{\circ}\text{. da } \frac{MVm}{M+m}$$

$$\text{II}^{\circ}\text{. da } \frac{MVm+m^2 v}{M+m}$$

$$\text{III}^{\circ}\text{. da } \frac{MVm-m^2 v}{M+m}.$$

COROLLARIO II.

90. E perciò il moto comunicato nell' ur-

urto al corpo di maſſa *m* dall' azione dell' altro, o estinto in queſt'altro dalla reazione di quello ſarà contraſſegnato nel caſo dell' urto

$$I^o.\ \text{da}\ \frac{MVm}{M+m}$$

$$II^o.\ \text{da}\ \frac{MVm+m^2v}{M+m}-mv=\frac{MVm-Mmv}{M+m}$$

$$III^o.\ \text{da}\ \frac{MVm-m^2v}{M+m}+mv=\frac{MVm+Mmv}{M+m}.$$

COROLLARIO III.

91. Se i corpi hanno maſſe uguali. Eſſendo M = m; ſarà nel primo caſo dell'urto $x=\frac{1}{2}V$, nel ſecondo caſo $x=\frac{1}{2}(V+v)$, e nel terzo $x=\frac{1}{2}(V-v)$.

COROLLARIO IV.

92. Se M, e V ſaranno grandezze finite, e *m* ſarà infinita per riſpetto di M; ſarà la velocità comune dopo l' urto nel primo caſo $x=\frac{MV}{M+m}=\frac{MV}{m}$, e conſeguentemente infinitamente picciola. E perciò, ſe un corpo finito con una velocità finita urta in un

un corpo quieto infinitamente maggiore, dopo l'urto appariranno ambi i corpi come immobili.

COROLLARIO V.

93. Se finalmente sarà $M : m = v : V$, e conseguentemente $MV = mv$; sarà nel terzo caso dell'urto $x = \frac{MV - mv}{M+m} = \frac{o}{M+m} = o$. Sicchè in tale caso i corpi dopo l'urto restano immobili.

PROBL. II.

94. *Date le masse, e le velocità, che hanno due corpi perfettamente elastici prima dell' urto diretto, determinare le velocità, che avranno dopo l'urto.*

SOLUZIONE.

Sieno P, e Q due corpi perfettamente elastici, che s'urtano; e sia verso B il moto, che avrebbero dopo l'urto, se non fossero elastici. Nell'istante dell'urto P comunica a Q colla sua azione, quanto moto li comunicherebbe verso B, se non fossero elastici, e P altrettanto ne perde per l'istessa direzione a cagione della reazione uguale di Q (§ 27). Ma, essendo i corpi perfet-

Fig. 3.

fettamente elaſtici, piegandoſi le loro parti nell' iſtante dell'urto per le loro azioni reciproche, nell'iſtante ſeguente ſi debbono ſpiegare facendovi ſu di eſſe l'elaſticità le medeſime azioni; e ſpiegandoſi le parti di Q da A verſo B, e quelle di P da A verſo C, l'elaſticità di Q comunica all' iſteſſo Q altrettanto moto verſo B, quanto ne le ha comunicato P nell' iſtante antecedente colla ſua azione; e l'elaſticità di P comunica all' iſteſſo P altrettanto moto verſo C, quanto ne ha nell' iſtante antecedente perduto verſo B per la reazione di Q. Sicchè, determinati i moti, che avrebbero P e Q dopo l' urto, ſe non foſſero elaſtici, e 'l moto, che ſi comunicherebbe in tale urto da P a Q, ſi trovano i moti, che debbono avere gli ſteſſi corpi dopo l'urto, eſſendo perfettamente elaſtici, con facilità; cioè ſi trova il moto di P col reſiduo, che naſce, ſottraendo il terzo de' tre moti già determinati dal primo, e 'l moto di Q ſi trova colla ſomma, che ſi ha, aggiugnendo l' iſteſſo terzo de' tre moti già determinati al ſecondo. Onde dividendo sì fatto reſiduo, e sì fatta ſomma per le riſpettive maſſe di P, e Q, i quozienti daranno le velocità cercate (§ 53). Per la qual coſa, ſe ſi contraſſegnano le dette maſſe con M, e m, le velocità, che hanno prima dell' urto con V, e v, e le velocità cercate, che debbono avere dopo l'urto, con x, e y; ſaranno nel caſo dell' urto I°.

I°.

$$x = \left(\frac{M^2 V}{M+m} - \frac{MmV}{M+m}\right) : M = \frac{MV - mV}{M+m}$$

$$y = \left(\frac{MVm}{M+m} + \frac{MVm}{M+m}\right) : m = \frac{2MV}{M+m}.$$

II°.

$$x = \left(\frac{M^2V + Mmv}{M+m} - \left(\frac{MmV - Mmv}{M+m}\right)\right) : M = \frac{MV - mV + 2mv}{M+m}.$$

$$y = \left(\frac{MmV + m^2 v}{M+m} + \frac{MmV - Mmv}{M+m}\right) : m = \frac{2MV - Mv + mv}{M+m}.$$

III°.

$$x = \left(\frac{M^2V - Mmv}{M+m} - \left(\frac{MmV + Mmv}{M+m}\right)\right) : M = \frac{MV - mV - 2mv}{M+m}$$

$$y=\left(\frac{MmV-m^2 v}{M+m}+\frac{MmV+Mmv}{M+m}\right):m=\frac{2MV+Mv-mv}{M+m}.$$

Ch'è quanto bisognava determinare.

AVVERTIMENTO I.

95. Si dovrebbero qui soggiugnere più conseguenze relativamente ai moti de' corpi perfettamente elastici; ma le tralasciamo per brevità, potendosele ognuno con facilità ricavare dalle formole già ritrovate.

AVVERTIMENTO II.

96. Si noti che se i corpi, che s' urtano direttamente, hanno un'elasticità imperfetta, cioè hanno $\frac{1}{2}$, o $\frac{1}{3}$, o $\frac{1}{4}$, ec. della perfetta elasticità: allora si trovano i moti, che debbono avere sì fatti corpi dopo l'urto, con accrescere, e diminuire rispettivamente quelli, che avrebbero dopo l' urto, se non fossero elastici, della metà, del terzo, del quarto, ec. del moto, che l'uno colla sua azione comunica all' altro nell' istante dell'urto.

AV-

AVVERTIMENTO III.

97. Si noti ancora che ſe de' due corpi, che s'urtano direttamente, uno ſolo è elaſtico; non ritrovando in tale caſo le parti dell' elaſtico, piegate nell' iſtante dell' urto, forza oppoſta, che poſſa impedire il loro ſpiegamento verſo il non elaſtico; ſi debbono sì fatte parti ſpiegare colla metà della forza elaſtica verſo il non elaſtico, e coll' altra metà verſo la parte oppoſta. Onde il moto del non elaſtico dopo l' urto deve eſſere alterato della metà di quello, che potrebbe comunicarli l' intera forza elaſtica dell' altro corpo; e 'l moto, che avrebbe l' elaſtico dopo l' urto, conſiderato come non elaſtico, deve anche ricevere altrettanta alterazione; perchè la metà della forza elaſtica ſi perde per la reazione del non elaſtico, e l' altra metà ſolamente, che fa lo sforzo per direzione contraria, s'impiega a produrre la detta alterazione di moto.

AVVERTIMENTO IV.

98. Si noti di vantaggio che ſe un corpo elaſtico urta direttamente un' altro corpo non ſolamente perfettamente duro, e quieto, ma incapace ad eſſer moſſo coll' urto, che riceve: non potendoſi le parti piegate nell' urto dilatare verſo il corpo duro,

si dilateranno interamente verso la parte opposta. Onde l' elasticità ricomunica all' elastico per direzione opposta o tutt' il moto, che aveva prima dell' urto, se è perfetta, o la metà, il terzo, il quarto, ec. di tal moto, secondochè è $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ec. dell' elasticità perfetta.

AVVERTIMENTO V.

99. Se finalmente un corpo elastico urta direttamente un altro corpo molle, quieto, ed incapace ad esser mosso coll'urto, che riceve: allora, se le parti piegate del molle nell' urto non possono ricevere ulteriore piegamento dalla forza, con cui cercano spiegarsi verso il molle le parti dell'elastico, ritorna in dietro l' elastico, come se avesse urtato un corpo perfettamente duro: ma se il molle riceve ulteriore piegamento dalla detta forza; le parti dell'elastico in tale caso si spiegano in parte verso il molle. Onde l' elastico torna in dietro con una porzione del moto, che li comunica l' intera elasticità; e tale porzione è maggiore, o minore, secondochè meno, o più è lo spiegamento, che succede verso il molle, e che produce l' ulteriore suo piegamento.

PROBL. III.

100. *Date le masse, le direzioni, e le velo-*

locità, che hanno prima dell'urto obbliquo due corpi, determinare le velocità, e le direzioni, che avranno dopo l'urto.

SOLUZIONE.

I.

Si muova la palla A equabilmente per AC, e urti, quando col suo centro è in C, la palla quieta B obbliquamente, talmente che la direzione AC sia inclinata al piano LM, tangente de' corpi nel luogo dell'urto. S'intenda congiunta la retta BC, che sarà perpendicolare al piano LM (§189 *del tom.* 4). Da A s' intenda calata AD perpendicolare a BC prolungata in D; e s' intenda compito il rettangolo DE. Fig. 4

Contrassegni AC la velocità di A per AC. E' chiaro che la forza, che anima A in C per AC può quanto le due, che lo spingessero insieme per le direzioni DC, EC con velocità espresse da DC, EC (§ *69*). Ma, spinto il corpo A da tali due forze insieme, non può egli su B fare azione, se non colla sola forza per DC. Dunque il corpo A, mosso per AC colla velocità espressa da AC, urta obbliquamente B, come se l'urtasse direttamente per la direzione DC colla velocità espressa da DC. E perciò dopo l'urto il corpo B si deve muovere, come se fosse urtato direttamente da A per la

direzione DC, e colla velocità espressa da DC; e A si deve muovere, come se fosse urtato insieme e dall' intera forza per EC, e da ciò, che li resta dopo l' urto della forza per DC. Date adunque le masse de' corpi A, e B, e data la velocità DC, con cui A urta direttamente B per la direzione DC; se si determinano le velocità di A, e B dopo tale urto, secondo s' è già insegnato, e si taglino da DB prolungata CG, BF, ch' esprimano sì fatte velocità, le quali saranno uguali, se i corpi non saranno elastici, e disuguali, se saranno elastici; e di più nel caso degli elastici, se la velocità di A dopo tale urto sarà positiva, CG procederà da C verso F, e, se sarà negativa, procederà da C verso D; disegnerà BF lo spazio, che correrà B dopo l' urto in tanto tempo, in quanto tempo prima dell' urto A corre AC. E perchè A nel medesimo tempo con ciò, che li resta dopo l' urto della forza per DC, correrebbe CG, e colla forza per EC, prolungata EC in H, finchè sia CH = CE, correrebbe CH; fatto il rettangolo HG, e tirata in esso la diagonale CI, correrà nell' istesso tempo CI. Per la qual cosa BF, CI disegnano le direzioni, e le velocità de' corpi A, e B dopo l' urto obbliquo.

II.

II.

Si muovano le palle A, e B equabilmente per AC, BD; e, quando i loro centri sono pervenuti in C, e D, s'urtino obbliquamente, talmente che le direzioni AC, BD sieno inclinate al piano LM, tangente de' corpi nel luogo dell' urto. S'intenda congiunta la retta DC, che sarà perpendicolare al piano LM (§ 189 *del tom.* 4). Da A, e B s'intendano calate AF, BG perpendicolari a DC prolungata verso F, e K; e s'intendano compiti i rettangoli EF, HG. Fig. 5.

Contrassegnino AC, BD le velocità di A e B per AC, BD. E' chiaro che la forza, che anima A in C può, quanto le due, che lo spingessero insieme per le direzioni FC, EC con velocità espresse da FC, EC; e che la forza, che anima B in D può, quanto le due, che lo spingessero insieme per le direzioni GD, HD con velocità espresse da GD, HD (§ *69*). Ma, spinti i corpi A e B da sì fatte quattro forze, non si possono urtare, se non colle forze per FC, GD. Dunque i corpi A, e B, mossi per AC, BD con velocità espresse da AC, BD, s'urtano obbliquamente, come se s'urtassero direttamente per direzioni opposte colle velocità espresse da FC, GD. E perciò dopo l'urto il corpo B si muoverà e colla forza, che avrà a cagione del detto

urto diretto, e colla forza per HD; e 'l corpo A si muoverà e colla forza, che avrà pure a cagione del medesimo urto diretto, e colla forza per EC. Date adunque le masse de' corpi A, e B, e date le velocità FC, GD, colle quali s'urtano i corpi direttamente; se si determinano le velocità di A, e B dopo tale urto, secondo s'è già insegnato, e si taglino CR, DK, ch'esprimano sì fatte velocità, le quali saranno uguali, se i corpi non saranno elastici, e disuguali, se saranno elastici; e di più nel caso degli elastici, se la velocità di A dopo tale urto sarà positiva, CR procederà da C verso K, e, se negativa, procederà da C verso F; disegneranno CR, DK gli spazj, che correrebbero A e B pel solo detto urto diretto in tanto tempo, in quanto tempo prima dell' urto A, e B corrono AC, BD. E perchè, prolungate EC in Q, e HD in I, finchè sieno CQ=EC, e DI = HD, nel medesimo tempo correrebbe A a cagione della forza per EC lo spazio CQ, e B a cagione della forza per HD lo spazio DI; perciò, fatti i rettangoli QR, KI, e tirate in essi le diagonali CO, DN, nell' istesso tempo correranno A, e B gli spazj CO, DN. Per la qual cosa CO, DN disegnano le direzioni, e le velocità de' corpi A, e B dopo l' urto obbliquo. Ch'è quanto bisognava determinare.

CO-

COROLLARIO I.

101. Contrassegnando AC la velocità, colla quale A si muove per AC, contrassegna DC la velocità, con cui A urta il corpo B obbliquamente. Dunque la velocità, con cui A urterebbe direttamente B, sta a quella, con cui l'urta obbliquamente, e conseguentemente la forza, con cui farebbe A l'urto diretto, sta alla forza, con cui fa l'urto obbliquo, come AC : DC, o come AC: AE, ovvero come il seno massimo al seno dell'angolo ACE, ch'è uguale all'inclinazione della direzione AC, per cui si muove il corpo A, col piano LM, tangente d'ambi i corpi nel luogo del contatto. E perciò quanto più il detto angolo d'inclinazione è minore, tanto più la forza, con cui si fa l'urto obbliquo, diviene minore di quella, con cui l'istesso corpo farebbe l'urto diretto, o sia della forza intera del medesimo corpo. Fig.4.

COROLLARIO II.

102. Se i corpi A, e B non sono elastici, e'l corpo B dopo l'urto segue a restare immobile; corre allora A dopo l'urto CH in tanto tempo, in quanto tempo prima dell'urto ha corso AC. Sicchè le velocità di A prima, e dopo l'urto sono tra lo-

loro nella ragione di AC: CH, o di AC: CE, cioè nella ragione del ſeno maſſimo al coſeno dell' angolo ACE.

COROLLARIO III.

103. Se i medeſimi corpi ſono perfettamente elaſtici, o uno di eſſi è tale, e l'altro perfettamente duro; e di più il corpo B ſegue pure dopo l' urto a reſtare immobile: non potendoſi le parti piegate nell' urto ſpiegare, ſe non da C verſo D, l' elaſticità in tale caſo comunica ad A dopo l'urto l'iſteſſa forza per CD, colla quale s' è fatto l' urto. Onde, fatto il rettangolo HD, e tirata in eſſo la diagonale CO, il corpo A dopo l' urto corre CO in tanto tempo, in quanto tempo prima dell' urto ha corſo AC.

COROLLARIO IV.

104. Quindi, eſſendo CO = CA, e l' angolo OCH, che ſi dice angolo della rifleſſione, uguale all' angolo ACE, che ſi chiama in tale caſo angolo dell' incidenza; il corpo A prima, e dopo l' urto cammina coll' iſteſſa velocità, e nell'urto rimbalſa facendo l' angolo della rifleſſione uguale all'angolo dell' incidenza.

CO-

COROLLARIO V.

105. Se finalmente i corpi A e B sono imperfettamente elastici, e B segue anche dopo l'urto a restare immobile; in tale caso, perchè la forza elastica comunica ad A non l'intera velocità, espressa da CD, ma parte di essa; supposto che tale parte sia espressa da CG, il corpo A dopo l' urto correrà CI in tanto tempo, in quanto tempo prima dell'urto ha corso AC. Onde in sì fatto caso va il corpo dopo l' urto con minore velocità di prima, e rimbalsa facendo l'angolo ICH della riflessione minore dell' angolo ACE dell' incidenza.

CAP. IV.

Delle leggi della discesa, e salita libera de' corpi terrestri per linee verticali.

OSSERVAZIONE I.

106. Se un corpo terrestre qualunque si lascia libero, e senza moto in qualsisia sito

sì

sì dello ſpazio, che circonda la terra, che de' ſpazj, che ſi trovano entro di eſſa, e ſito, nel quale ci è permeſſo poterlo laſciare; s'oſſerva da ſe metterſi in moto, e diſcendere per una retta perpendicolare alla ſuperficie della medeſima terra.

COROLLARIO I.

107. Dunque i corpi terreſtri ſono animati da una forza, che li ſpinge per rette perpendicolari alla ſuperficie della terra. Ora sì fatta forza ſi chiama comunemente *Gravità* de' corpi.

COROLLARIO II.

108. Eſſendo le direzioni della gravità perpendicolari alla ſuperficie della terra, ſarebbero tutte dirette verſo il centro della terra, ſe la terra foſſe perfettamente sferica. Ma perchè la terra è alquanto ſchiacciata ne' ſuoi poli, ed elevata nell'equatore: perciò le dette direzioni della gravità non ſono dirette verſo il centro della terra, ſe non a un di preſſo.

OSSERVAZIONE II.

109. Non ſi ſente il peſo d'un corpo, ſe non quando s'impediſce la ſua diſceſa verſo la terra.

CO-

COROLLARIO.

110. Dunque il peſo di qualunque corpo terreſtre non è, ſe non l' effetto dello sforzo della gravità, che lo ſpinge a un dì preſſo verſo il centro della terra.

OSSERVAZIONE III.

111. Ogni corpo terreſtre, finchè conſerva l' iſteſſa maſſa, conſerva ancora l' iſteſſo peſo; ne s' oſſerva variare il peſo d' un corpo, eſplorandolo alle diverſe diſtanze dalla ſuperficie della terra, alle quali ci è permeſſo eſplorarlo.

COROLLARIO I.

112. Dunque la gravità, che anima qualunque corpo terreſtre in tutte le diſtanze dalla ſuperficie della terra, nelle quali ci è permeſſo fare ſperienze, non ſolamente fa azione continua ſu di eſſo, ma ben anche è coſtante; vale a dire che in ogni iſtante di tempo replica ſempre ſu di eſſo la medeſima azione.

COROLLARIO II.

113. Quindi i corpi terreſtri partendo dalla quiete, e ſcendendo liberamente verſo

la

la terra per le dette distanze a cagione delle loro forze di gravità, vi scendono con moti uniformemente accelerati, cioè vi scendono in modo, che le loro velocità s'accrescono a proporzione, che crescono i tempi, che impiegano in discendere.

COROLLARIO III.

114. Se un corpo è spinto verticalmente da giu in su, ed è spinto da una forza, che fa la sua azione in un solo istante; sì fatto corpo, supposto che salga liberamente, cioè senza incontrare resistenza esterna, non può per la salita muoversi equabilmente, opponendoseli la sua gravità, che in ogni istante li distrugge della sua forza, quanta ne li comunicherebbe, se liberamente scendesse; ma si deve muovere di moto uniformemente ritardato, andando la perdita della sua velocità crescendo a proporzione, che cresce il tempo della salita.

COROLLARIO IV.

115. Sicchè la gravità fa discendere i corpi verso la terra, quando vi discendono liberamente, con moti uniformemente accelerati, e fa salire i corpi verticalmente, quando verticalmente vengono spinti da giu in su, e salgono liberamente, con moti uniformemente ritardati.

CO-

COROLLARIO V.

116. In oltre un corpo, che ſale con moto uniformemente ritardato, deve ceſſare di ſalire, quando la gravità colle replicate ſue azioni uguali l'ha eſtinta l'intera forza, colla quale ha principiato la ſalita; cioè quando il corpo s'è moſſo per tanto tempo, quanto ne ha biſogno la gravità per comunicarli tanto moto, quanto ne ha ricevuto per ſalire. Quindi tanta forza ha biſogno un corpo per ſalire liberamente per una altezza, quanta ne li comunica la gravità ſcendendo liberamente per la medeſima altezza; e di più tanto tempo impiega un corpo ſalendo liberamente per una altezza, quanto ne impiega liberamente ſcendendo per la medeſima altezza.

COROLLARIO VI.

117. Contraſſegni AB l'altezza, per cui ſale un corpo liberamente. Perchè tanta forza deve avere in A per ſalire fino a B, quanta ne li comunica la gravità ſcendendo liberamente da B fino ad A; e tanta in O per ſalire fino a B, quanta ne li comuca la gravità ſcendendo da B fino a O, e così procedendo per tutti gli altri punti della ſalita AB; perciò un corpo, che liberamente ſale per AB, paſſa per gli diverſi Fig. 6.

pun-

punti di AB cogli medesimi gradi di velocità, co' quali vi passa scendendo liberamente da B in A.

AVVERTIMENTO.

118. Si noti che se un corpo è spinto in A verticalmente da giu in su con tanta forza, quanta ne li bisogna per salire liberamente fino a B; incontrando nel salire resistenza esterna sensibile, come accade agli corpi, che salgono per entro l' aria, non puole in O avere la forza sufficiente per giugnere da O in B. Si supponga avere il corpo in O la forza sufficiente a salire liberamente fino a C; proseguendo sì fatto corpo la salita, per la resistenza, che soffre, nè tampoco può giugnere in C. Si supponga che cessi di salire nel punto D; incomincierà la sua discesa dal punto D. E percio, se non soffrisse resistenza, avrebbe in O discendendo la velocità acquistata per DO, e non già per CO, e conseguentemente una velocità minore di quella, che ha avuto nell' istesso punto O salendo; e per la resistenza avrà in O molto più minore velocità scendendo, che salendo. Ciò che si è detto relativamente al punto O, si deve intendere relativamente a ogni altro punto della verticale, per cui sale il corpo. Dunque, se un corpo salendo incontra resistenza sensibile, per gli diversi punti della salita vi

vi ſcorre con gradi maggiori di velocità ſalendo, che diſcendo, e conſeguentemente v' impiega meno tempo in ſalire, che in diſcendere. Ecco la ragione perchè il tempo della ſalita delle bombe, e delle palle è ſempre minore di quello della loro diſceſa.

OSSERVAZIONE IV.

119. Se due corpi diſugualiſſimi di maſſe ſi laſciano diſcendere liberamente, per uguali altezze, partendo ambidue dalla quiete, s'oſſervano diſcendere in tempi uguali.

AVVERTIMENTO I.

120. Si noti che un sì fatto fenomeno non s'oſſerva nell'aria, ſe non relativamente a que' corpi, a' quali ella non fa ſenſibile reſiſtenza, cioè relativamente a que' corpi, che hanno molto peſo, e picciolo volume; s'oſſerva poi relativamente a tutti i corpi nel vuoto.

COROLLARIO I.

121. Impiegando tutt' i corpi, che partono dalla quiete, e diſcendono liberamente, tempi uguali in diſcendere per uguali altezze: è facile ad intendere che con tanta velocità ſi muove nel primo iſtante della ſua diſceſa un corpo, con quanta ſi muove ogni

altro; e che con quanta velocità conseguentemente si muove uno nel 2°, 3°, 4°, 5°, ec. istante della sua discesa, con tanta rispettivamente si muove ogni altro nel 2°, 3°, 4°, 5°, ec. istante della discesa sua. Sicchè tutt' i corpi, che partono dalla quiete, e discendono liberamente, non solo in tempi uguali corrono spazj uguali, ma ben anche acquistano uguali velocità, e con uguali gradi di velocità passano per punti delle altezze, per le quali discendono, ugualmente distanti da quelli, da' quali incominciano a discendere.

COROLLARIO II.

122. Acquistando in oltre tutt' i corpi nel primo istante delle loro discese libere uguali velocità; saranno le forze motrici, o sieno le forze di gravità, che fanno azioni in essi nel primo istante, nella ragione de' moti, che acquistano nel medesimo primo istante, e conseguentemente nella ragione delle loro masse (§ 53). E perciò nella ragione delle masse de' corpi sono in ogni istante le forze di gravità, che l' animano. Sono di più i pesi de' corpi gli effetti degli sforzi delle loro forze di gravità (§110). Dunque in ogni istante sono i pesi de' corpi nella ragione delle forze di gravità, e conseguentemente nella ragione delle masse de' medesimi corpi. Ecco perchè si è detto so-

sopra che la ragione delle masse de' corpi ce l'addita la ragione de' loro pesi.

AVVERTIMENTO II.

123. Si noti che se si lascia discendere liberamente qualunque corpo, e si misura esattamente l'altezza, per cui discende in 1' di tempo, si trova tale altezza essere di piedi parigini 15 $\frac{1}{12}$, o di palmi napoletani 18.57; il che corrisponde esattamente col calcolo di Cristiano Hugenio.

AVVERTIMENTO III.

124. Si noti ancora che l'incomparabile Newtone, combinando la Geometria colle osservazioni celesti, dimostra 1. che ogni Pianeta, oltre del moto costante ricevuto sul principio delle sue rivoluzioni per la retta tangente la curva, che descrive, e nel punto, da cui ha incominciato le dette rivoluzioni, viene continuamente spinto da una forza, chiamata *forza centripeta*, diretta al corpo, intorno cui egli si gira, cioè diretta al Sole, se è pianeta primario, o al suo primario, se è pianeta secondario; 2. che sì fatta forza centripeta agisce in ragione reciproca de' quadrati delle distanze dal punto, al quale è diretta; 3. che la Luna colla sola sua forza centripeta presso la Terra scenderebbe in 1" di tempo liberamente per

pal. 18. 57, cioè per quant' altezza ſcende ogni corpo terreſtre nelle vicinanze della terra, qualora liberamente vi ſcende. Da tutto ciò è facile a dedurne 1. che la forza di gravità, che ſpinge i corpi terreſtri verſo la Terra, non differiſce dalla forza centripeta, che ſpinge la Luna anche verſo la Terra, e conſeguentemente non differiſce dalle forze centripete, che fanno azioni continue ſugli altri pianeti; 2. che la medeſima forza di gravità, che ſpinge i corpi terreſtri verſo la Terra, deve anch' ella agire in ragione reciproca de' quadrati delle diſtanze dal centro dell' iſteſſa Terra.

AVVERTIMENTO IV.

125. Ancorchè però la gravità non faccia un' azione coſtante in tutte le diſtanze dal centro della Terra: nondimeno negli diverſi punti di qualunque delle altezze, per le quali oſſerviamo diſcendere i corpi terreſtri, non può ella manifeſtare differenza ſenſibile nelle ſue azioni; poichè i quadrati delle diſtanze di sì fatti punti dal centro della terra non hanno ſenſibili differenze tra loro. Onde ſempre la gravità ne' corpi terreſtri nelle altezze, per le quali l' oſſerviamo diſcendere, e ſalire, deve fare un' azione coſtante in ogni iſtante, e conſeguentemente deve obbligarli a diſcendere co' moti uniformemente accelerati, qualora liberamen-

mente discendono, e a salire co' moti uniformemente ritardati, qualora salgono liberamente.

AVVERTIMENTO V.

126. Si noti finalmente che, essendo la Terra alquanto schiacciata ne' poli, ed elevata nell'equatore, la gravità deve fare azione maggiore su corpi ne' poli, che nell' equatore; e conseguentemente per una data altezza deve far discendere i corpi in tempo più brieve ne' poli, che nell' equatore. Il che s'accorda mirabilmente colle osservazioni de' pendoli fatte in diversi luoghi della Terra. Però o un corpo discende liberamente in uno de' poli, dove l'azione della gravità è maggiore, o nell' equatore, dove è minore, o in qualunque altro luogo della Terra, che tramezza tra l'equatore, e uno de' poli, dove è di mezzana efficacia, sempre deve discendere per qualunque delle altezze, per le quali s' osservano discendere i corpi terrestri, con moto uniformemente accelerato.

TEOR. IV.

127. *Se un corpo parte dalla quiete, e discende liberamente con moto uniformemente accelerato, l'altezza, per la quale discende in qualsivoglia tempo, è la metà dello spazio, che*

correrebbe con moto equabile nel medesimo tempo, e colla velocita acquistata nella fine della discesa.

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 7. Sia ABC un triangolo rettangolo; e contrassegnino AB il tempo, in cui un corpo partendo dalla quiete liberamente discende per qualsisia altezza, e BC la velocità acquistata nella fine della discesa. Si faccia il rettangolo BD, e in esso, ovunque si vuole, si tiri PQ parallela a BC. Essendo le velocità, che acquista un corpo liberamente discendendo ne' tempi disegnati da AP, AB nella ragione di AP: AB (§113), e conseguentemente nella ragione di PO: BC; ed esprimendo BC la velocità acquistata nel tempo disegnato da AB; esprimerà PO la velocità acquistata nel tempo disegnato da AP. S'intenda in oltre tirata pq parallela, e infinitamente vicina a PQ. Contrassegneranno Pp una parte infinitamente picciola del tempo espresso da AB, e po la velocità acquistata nel tempo espresso da Ap. Or potendosi senza errore sensibile prendere po come uguale a PO, si potrà anche prendere senza errore sensibile il moto variabile del corpo durante il tempo infinitamente picciolo disegnato da Pp, come equabile. Sicchè lo spazietto, che correrà il corpo nel picciolo tempo disegnato da Pp discendendo li-

liberamente, ſtarà allo ſpazietto, che nell'iſteſſo picciolo tempo correrebbe con moto uniforme, e colla velocità coſtante BC, come PO: BC (§ 47), o come PO: PQ, o come il trapezietto POop, elemento del triangolo ABC, al rettangoletto PQqp, elemento del rettangolo BD. Similmente ſi dimoſtra che lo ſpazietto, che correrà il corpo liberamente ſcendendo in ogni altro elemento del tempo diſegnato da AB, ſtarà allo ſpazietto, che correrebbe nel medeſimo elemento di tempo colla velocità coſtante diſegnata da BC, come un elemento del triangolo ABC all' elemento corriſpondente del rettangolo BD. Perciò l' intera altezza, che correrà il corpo liberamente ſcendendo in tutt' il tempo diſegnato da AB, ſta allo ſpazio, che correrebbe nel medeſimo tempo colla velocità coſtante diſegnata da BC, come l' intero triangolo ABC all' intero rettangolo BD, o come 1: 2. Per la qual coſa, ſe un corpo parte dalla quiete, e diſcende liberamente, ec. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

128. Salendo ogni corpo verticalmente ſpinto da giu in ſu, qualora vi ſale liberamente, per quella altezza, per la quale liberamente diſcendendo acquiſta l'iſteſſa velocità avuta nel principio della ſalita, e im-

piegando tanto tempo nella ſalita, quanto ne impiega nella diſceſa (§116): è facile ad intendere che, ſe un corpo è ſpinto verticalmente da giu in su, e ſale liberamente, l'altezza, per cui ſale, è la metà dello ſpazio, che correrebbe nel medeſimo tempo colla velocità coſtante avuta nel principio della ſalita.

COROLLARIO II.

129. Quindi ogni corpo, che liberamente diſcende, o ſale, purchè in diſcendere parta dalla quiete, e in ſalire cammini verticalmente, corre nel tempo della diſceſa, o ſalita uno ſpazio uguale a quello, che nel medeſimo tempo correrebbe con moto uniforme, e colla metà della velocità acquiſtata nella fine della diſceſa, o avuta nel principio della ſalita.

COROLLARIO III.

130. Scendendo finalmente ogni corpo liberamente in 1″ di tempo per un' altezza di palmi 18. 57 (§123): è chiaro che, ſe un corpo ſi muove uniformemente colla velocità, che acquiſterebbe liberamente ſcendendo in 1″ di tempo, corre in 1′ di tempo lo ſpazio di pal.37. 14; e che, ſe un corpo è ſpinto verticalmente da giu in ſu con tanta velocità, con quanta in 1″ di

tem-

tempo correrebbe con moto equabile lo ſpazio di pal.37. 14, ſalendo liberamente giugnerà a un' altezza di pal. 18. 57, e vi giugnerà in 1" di tempo.

TEOR. V.

131. *Se un corpo partendo dalla quiete diſcende liberamente, i ſpazj, che corre, numerati tutti dal principio della diſceſa, ſono tra loro nella ragione de' quadrati de' tempi, ne' quali ſi corrono.*

DIMOSTRAZIONE.

Parta un corpo dalle quiete, e diſcenda liberamente per la verticale AO. Si prendano in sì fatta verticale ad arbitrio i punti B, C, D, ec.. Saranno le altezze AB, AC, AD, ec., che correrà col moto uniformemente accelerato uguali riſpettivamente agli ſpazj, che con moti equabili correrebbe ne' tempi delle diſceſe per AB, AC, AD, ec., e colle metà delle velocità, che acquiſta liberamente diſcendendo per AB, AC, AD, ec. (§129). Sicchè le altezze AB, AC, AD, ec. hanno tra loro ragioni compoſte da quelle de' tempi delle diſceſe del corpo per AB, AC, AD, ec., e da quelle delle metà delle velocità, e conſeguentemente delle intere velocità, che acquiſta nelle medeſime diſceſe per AB, AC, AD, Fig. 8.

AD, ec. (§ 48). Ma le ragioni delle velocità, che acquista per le altezze AB, AC, AD, ec. uguagliano rispettivamente quelle de' tempi delle discese per le medesime altezze (§113). Dunque le altezze AB, AC, AD, ec., che il corpo corre col moto uniformemente accelerato, numerate dal principio della discesa, sono tra loro, come i quadrati de' tempi, ne' quali si corrono (§247 *del tom.* 2). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

132. Sia un corpo spinto verticalmente da giù in su con tale velocità, che liberamente possa salire da O fino ad A. Essendo i tempi delle salite libere per OA, DA, CA, BA uguali rispettivamente agli tempi delle discese libere per AO, AD, AC, AB (§ 116); saranno nelle salite libere non gli spazj corsi, ma quelli, che restano a correre, come i quadrati de' tempi, ne' quali vengono corsi.

COROLLARIO II.

133. Contrassegnino T, t, r i tempi delle salite libere per OA, DA, CA; saranno

OA:

$$OA : DA = T^2 : t^2$$
$$OA : CA = T^2 : r^2 .$$

Onde

$$OD : OA = T^2 - t^2 : T^2$$
$$OC : OA = T^2 - r^2 : T^2 .$$

E perciò

$$OD : OC = T^2 - t^2 : T^2 - r^2 = (T - t)(T + t) : (T - r)(T + r).$$

Ma $T - t$, $T - r$ disegnano i tempi delle salite per OD, OC, e $T + t$, $T + r$ disegnano i residui, che si hanno sottraendo successivamente da $2T$ prima $T - t$, e poscia $T - r$. Dunque, se un corpo sale liberamente da O fino ad A, gli spazj OD, OC sono tra loro in ragione composta da quella de' tempi, che impiega per OD, OC, e da quella degli tempi, che si hanno con togliere i medesimi tempi impiegati per OD, OC dal doppio di quello, che impiega per la salita totale OA.

COROLLARIO III.

134. Essendo in oltre le velocità di qualunque corpo ne' punti B, C, D, O tanto, quando liberamente discende da A ad O, quanto quando liberamente sale da O ad A nel-

nella ragione de' tempi, ne' quali o scendendo, o salendo corre AB, AC, AD, AO (§115); saranno in ambi i casi le altezze AB, AC, AD, AO nella ragione anche de' quadrati delle velocità del corpo ne' medesimi punti B, C, D, O.

COROLLARIO IV.

135. E perciò, se un corpo liberamente o discende da A ad O, o sale da O ad A, sì i tempi, ne' quali corre AB, AC, AD, AO, che le velocità, che ha ne' punti B, C, D, O sono tra loro nella ragione delle radici delle altezze AB, AC, AD, AO.

COROLLARIO V.

136. In oltre, se il tempo, che un corpo partendo dalla quiete impiega in discendere liberamente da qualunque altezza, si divide in qualsivoglia numero di parti uguali. Essendo gli spazj computati dal principio della discesa, che si trova avere corso il corpo nella fine della 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, ec. parte del detto tempo, nella ragione di 1, 4, 9, 16, 25, 36, ec. (§ 131); saranno gli spazj successivamente corsi in ciascuna delle dette parti nella ragione de' numeri dispari 1, 3, 5, 7, 9, 11, ec.. Sicchè i corpi, che partendo dalla quiete scendono liberamente, in uguali inter-

tervalli di tempo corrono successivamente spazj, che crescono come i numeri dispari 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ec..

COROLLARIO VI.

137. Finalmente, essendo i tempi, che impiega un corpo a salire liberamente per le diverse parti d'un'altezza uguali rispettamente a quelli, che v'impiega a correrle, qualora liberamente vi scende. Se il tempo della salita libera d'un corpo per qualunque altezza si divide in qualsivoglia numero di parti uguali, i spazj corsi successivamente negl'intervalli uguali di tempo, disegnati dalle dette parti, saranno come i numeri dispari presi in ordine contrario, principiando però da quello, che verrà denominato dal numero delle parti del tempo, cioè dal quinto, se il tempo sarà diviso in cinque parti uguali, dal sesto, se sarà diviso in sei parti uguali; e così procedendo innanzi.

PROBL. IV.

138. *Determinare l'altezza, per cui un corpo, che parte dalla quiete, liberamente discende in un dato tempo.*

Soluzione.

Si cerchi in ordine al quadrato di 1'', al qua-

quadrato del tempo dato , e all' altezza di palmi 18. 57 il quarto proporzionale. Darà sì fatto quarto proporzionale l' altezza cercata (§131).

ESEMPIO.

Sia il tempo dato di 5'', e l'altezza cercata = x. Sarà 1: 25 = 18. 57: x. Dunque x = 25×18. 57 = 464. 25 di pal..

COROLLARIO.

139. Sicchè un corpo, che liberamente scende per 5'', colla velocità acquistata nella fine della discesa può, muovendosi equabilmente, correre in 5'' pal. 928 $\frac{1}{2}$, e conseguentemente in 1'' palm. 185. 7.

PROBL. V.

140. *Data l' altezza, ritrovare il tempo, in cui un corpo, che parte dalla quiete, liberamente vi discende.*

SOLUZIONE.

Si trovi in ordine all' altezza di palm. 18. 57, all' altezza data, e al quadrato di 1'' il quarto proporzionale. Il quarto proporzionale darà il quadrato del tempo cerca-

cato; e la sua radice darà l' istesso tempo cercato (§131).

ESEMPIO.

Sia l'altezza data di pal. 297. 12, e 'l tempo cercato $=x$. Sarà $18.57: 297.12 = 1 : x^2$; onde $x^2 = 16$, e $x = 4''$.

PROBL. VI.

141. *Data la velocità, o sia lo spazio, che un corpo corre in 1'' con moto equabile, ritrovare l' altezza, per cui dee, partendo dalla quiete, liberamente discendere per acquistare sì fatta velocità.*

SOLUZIONE.

Si cerchi in ordine al quadrato di palm. 37.14, al quadrato dello spazio dato, e all' altezza di palm. 18.57 il quarto proporzionale. Darà sì fatto quarto proporzionale l'altezza cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo di palm. 37.14 lo spazio, che corre un corpo in 1'' colla velocità costante, acquistata per l' altezza di palm. 18.57; sarà la velocità, che acquista un corpo per l'altezza di pal. 18. 57 alla velocità data, o sia a quella, che s'acquista per l' altezza cer-

ca-

cata, come 37. 14 allo ſpazio dato (§47). E perciò, eſſendo le altezze come i quadrati delle velocità, che s'acquiſtano per eſſe; ſe ſi farà, come ſta il quadrato di palm. 37. 14 al quadrato dello ſpazio dato, così l'altezza di palm. 18. 57 al quarto proporzionale, darà sì fatto quarto proporzionale l'altezza cercata. Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

ESEMPIO.

Sia lo ſpazio dato, che un corpo corre in 1" di pal. 185.7, e ſia l'altezza cercata $= x$; ſarà $(37.14)^2 : (185.7)^2 = 18.57 : x$. Dunque $x = 464.25$ di palm..

CAP. V.

Delle leggi della diſceſa, e ſalita de' corpi per piani inclinati.

DEFINIZIONE I.

142. Si dice *Piano inclinato* quello, che coll'orizzontale forma qualunque angolo obbliquo.

DE-

DEFINIZIONE II.

143. Contrassegnino AB qualunque piano inclinato, e CB il piano orizzontale, al quale è quello inclinato, e AC la perpendicolare calata su BC da qualunque punto del piano AB. Del piano inclinato si diranno AB la *lunghezza*, AC l'*altezza*, e ABC l'*angolo d' inclinazione*. Fig. 9.

DEFINIZIONE III.

144. Di qualunque corpo si diranno *Gravità assoluta* quella, che lo spingerà per la verticale, e *Gravità rispettiva* quella porzione della gravità assoluta, che lo spingerà obbligandolo a discendere pel piano inclinato.

TEOR. VI.

145. *Se un corpo è posto su d' un piano inclinato, la gravità assoluta sua sta alla rispettiva, che ha sul piano inclinato, come la lunghezza dell' istesso piano inclinato all' altezza.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia il corpo O situato sul piano inclinato AB, e OE sia la verticale, per cui viene spinto dalla sua gravità assoluta. Da O si cali su AB la perpendicolare OF. Esprimen-

mendo con OE l' efficacia , e la direzione della gravità assoluta, farà ella sul corpo O l' istessa azione, che le due insieme, l'efficacie, e direzioni delle quali vengono espresse da OF, FE (§ *69*) . Ma colla forza espressa da OF non può il corpo, se non se premere il piano AB. Dunque spinge il corpo pel piano inclinato la sola forza espressa da FE. E perciò la gravità assoluta sta alla rispettiva, come OE : FE . E' in oltre, per essere il triangolo OFE simile a EDB, e conseguentemente simile ad ACB, la OE : FE = AB : AC . Dunque la gravità assoluta del corpo O sta alla rispettiva, che ha sul piano inclinato AB, come la lunghezza AB all' altezza AC. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

146. Quindi quanto più l'altezza AC è minore della lunghezza AB, tanto più la gravità rispettiva è minore dell' assoluta.

COROLLARIO II.

147. Essendo AB: AC, come il seno massimo al seno dell' angolo in B (§ *56 del tom.* 5) ; farà la gravità assoluta d' un corpo alla gravità rispettiva, che avrà su qualunque piano inclinato, come il seno massimo al seno dell' angolo d' inclinazione del

del medesimo piano inclinato col piano orizzontale.

COROLLARIO III.

148. Esprimendo OF la forza, con cui il corpo O preme il piano AB. Sarà la gravità assoluta del corpo O alla forza, con cui preme il piano inclinato AB, come OE: OF, ovvero come AB: BC, e conseguentemente come il seno massimo al coseno dell'angolo d'inclinazione ABC.

COROLLARIO IV.

149. In oltre la gravità assoluta di qualunque corpo sta alla rispettiva, che ha su qualsisia piano inclinato, come la lunghezza del medesimo piano all'altezza. Dunque, essendo l'assoluta l'istessa sempre per tutta la lunghezza del piano, l'istessa sempre per tutta la lunghezza del medesimo piano sarà anche la rispettiva. E perciò i corpi nel discendere, e salire sono in ogni istante spinti da una forza costante, tanto se scendono, e salgono per linee verticali, quanto se scendono, e salgono per piani inclinati.

COROLLARIO V.

150. Quindi i moti de' corpi per piani inclinati sono nel discendere uniformemente

accelerati, e nel salire uniformemente ritardati, e conseguentemente sottoposti alle medesime leggi de' moti per linee verticali.

COROLLARIO VI.

151. Onde, se un corpo discende per un piano inclinato, 1° la velocità sua cresce a proporzione del tempo della discesa; 2° gli spazj numerati dal principio della discesa sono come i quadrati de' tempi, ne'quali li corre, e conseguentemente come i quadrati delle velocità, che acquista per essi; 3° sì i tempi, ne' quali corre spazj numerati dal principio delle discese, che le velocità, che acquista per gli medesimi spazj, sono nella ragione delle radici di sì fatti spazj; 4° gli spazj, che successivamente corre in uguali intervalli di tempo, sono nella ragione de' numeri dispari 1, 3, 5, 7, 9, 11, ec.; 5° finalmente lo spazio, che corre pel piano inclinato è sempre la metà di quello, che correrebbe nel medesimo tempo colla velocità costante acquistata nella fine della discesa pel medesimo spazio.

COROLLARIO VII.

152. Se poi un corpo è spinto da giu in su per la direzione d'un piano inclinato, 1° giugne egli a quel punto del piano, da cui scendendo acquista nella fine della discesce-

ſceſa l' iſteſſa velocità avuta nel principio della ſalita; 2° cogli medeſimi gradi di velocità paſſa per gli diverſi punti del piano ſalendo, che ſcendendo; 3° gli ſpazj numerati dalla fine della ſalita ſono come i quadrati de' tempi, ne' quali ſi corrono, e conſeguentemente come i quadrati delle velocità, colle quali s' incominciano a correre; 4° gli ſpazj numerati dal principio della ſalita ſono in ragione compoſta da quella de' tempi, che v' impiega in correrli, e da quella de' tempi, che ſi hanno con togliere i tempi, che v' impiega in correrli, dal doppio di quello, che v' impiega per la ſalita totale; 5° gli ſpazj, che ſucceſſivamente corre in uguali intervalli di tempo, ſono come i numeri diſpari 1, 3, 5, 7, 9, ec., preſi con ordine contrario.

COROLLARIO VIII.

153. Contraſſegnino di più G, g le gravità aſſolute di due corpi, R, r le gravità riſpettive, che hanno ſu due piani inclinati, L, l le lunghezze di tali piani, e A a le loro altezze. Saranno

$$G : R = L : A$$
$$g : r = l : a.$$

Onde

$$R \times L = G \times A$$
$$r \times l = g \times a.$$

E perciò

$$R \times L : r \times l = G \times A : g \times a.$$

COROLLARIO IX.

154. Quindi, se sarà $G = g$, e $L = l$, sarà $R : r = A : a$. Sicchè le gravità rispettive di due corpi uguali, situati su piani inclinati d'uguali lunghezze, e di disuguali altezze, sono tra loro nella ragione delle medesime altezze.

COROLLARIO X.

155. Se poi sarà $G = g$, e $A = a$; sarà $R \times L = r \times l$, e conseguentemente $R : r = l : L$. Dunque le gravità rispettive di due corpi uguali, posti su piani inclinati d'uguali altezze, e di disuguali lunghezze, sono in ragione reciproca delle medesime lunghezze.

COROLLARIO XI.

156. Se sarà $A = a$, e $G : g = L : l$, sa-

sarà R : r = 1 : 1, e conseguentemente R = r. Onde i corpi situati su piani inclinati d'uguali altezze, e che hanno gravità assolute proporzionali alle lunghezze de' medesimi piani, hanno gravità rispettive uguali.

COROLLARIO XII.

157. Se finalmente sarà A = a, e R = r, sarà G : g = L : l. Dunque se due corpi su due piani inclinati d' uguali altezze hanno le gravità rispettive uguali, hanno pure le gravità assolute proporzionali alle lunghezze de' medesimi piani.

TEOR. VII.

158. *La velocità d' un corpo, che scende per qualsisia piano inclinato, acquistata in qualunque tempo della sua discesa, sta alla velocità, che acquisterebbe nel medesimo tempo, se scendesse verticalmente, come l'altezza del medesimo piano alla lunghezza.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo equabilmente accelerato sì il moto pel piano inclinato, che il moto per la verticale; sarà la velocità d'un corpo, che scende per qualsisia piano inclinato, acquistata in qualunque tempo della sua discesa, alla velocità, che acquisterebbe nel medesi-

mo tempo, se scendesse verticalmente, come la velocità, che acquista in un' istante pel piano inclinato, alla velocità, che in un istante acquista per la verticale; e perciò come la gravità rispettiva sul medesimo piano all' assoluta, e conseguentemente come l' altezza del piano alla sua lunghezza. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

159. Quindi, se più corpi scendono per un' istesso piano inclinato, le velocità, che acquistano in tempi uguali, hanno a quelle, che acquisterebbero verticalmente scendendo negl' istessi tempi, uguali ragioni. E perciò, essendo uguali le velocità, che acquistano corpi diversi in tempi uguali per le verticali, uguali saranno ancora le velocità, che acquisteranno corpi diversi in tempi uguali per l' istesso piano inclinato.

COROLLARIO II.

Fig. 10. 160. Sieno AE, AF gli spazj, che un corpo può in tempi uguali correre pel piano inclinato AB, e per la verticale AC. Saranno 2AE, 2AF gli spazj, che può correre in altrettanti tempi colle velocità costanti acquistate per AE, AF (§§ 127, e 151). Ma ne' moti equabili gli spazj corsi in tempi uguali sono nella ragione delle velo-

ci-

cità (§ 47). Dunque sarà 2AE : 2AF, ovvero AE: AF, come la velocità, che s' acquista per AE, alla velocità, che s' acquista per AF, e conseguentemente come AC: AB. Sicchè la ragione de' detti spazj AE, AF uguaglia quella dell'altezza del piano inclinato alla lunghezza.

COROLLARIO III.

161. Dal punto C si cali su AB la perpendicolare CD, e si congiunga EF. Essendo DA: AC = AC: AB (§ 305 *del tom.* 2), sarà AE: AF = AD: AC; onde EF è parallela a CD, e conseguentemente l'angolo in E è retto. Sicchè la retta, che unisce gli estremi de' due spazj, che in tempi uguali un corpo può correre e pel piano inclinato, e per la verticale, forma col medesimo piano inclinato un angolo retto.

COROLLARIO IV.

162. Sia di più EF tirata dovunque si vuole perpendicolare ad AB. Contrassegnerà AF lo spazio, che un corpo può correre nel medesimo tempo, che correrebbe AE pel piano inclinato. Poichè, se non contrassegna AF il detto spazio, lo contrassegnerà un' altra AG; e perciò, congiunta EG, sarà l'angolo AEG retto (§ *prec.*), e conseguentemente uguale ad AEF; il che è impos-

possibile. Dunque, se si tira EF dovunque si vuole perpendicolare ad AB, sì fatta perpendicolare determina i due spazj AE, AF, che un corpo può in tempi uguali correre pel piano inclinato, e per la verticale.

COROLLARIO V.

163. Per la qual cosa, dato lo spazio AE, si trova AF o con innalzare da E su AB la perpendicolare EF; o con determinare la quarta proporzionale in ordine ad AC, AB, AE. Dato poi lo spazio AF, si trova AE o con calare da F su AB la perpendicolare FE, o con determinare la quarta proporzionale in ordine ad AB, AC, AF. Dato finalmente lo spazio AE, si può determinare lo spazio, che per un altro piano inclinato correrebbe un corpo nel medesimo tempo, che corre AE, con determinare prima AF, e poscia lo spazio, che può per l' altro piano inclinato correre nell' istesso tempo, che per la verticale correrebbe uno spazio uguale ad AF.

COROLLARIO VI.

164. Essendo finalmente CD perpendicolare ad AB, sarà AD lo spazio, che un corpo può correre pel piano inclinato nel medesimo tempo, che verticalmente scenderebbe per l' intera altezza AC; e conseguente-

temente sarà la velocità, che acquista un corpo per AD, alla velocità, che acquista per AC, come AC: AB (§158), e perciò come AD: AC.

TEOR. VIII.

165. *La velocità, che acquista un corpo discendendo per tutta la lunghezza di qualunque piano inclinato AB, è uguale a quella, che acquista verticalmente scendendo per l'intera altezza AC.*

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda da C calata su AB la perpendicolare CD. Saranno le velocità, che un corpo acquisterà scendendo per AD, AB, come le radici di AD, AB (§ 151), e conseguentemente, essendo AD, AC, AB continuamente proporzionali, come AD, AC. Sono anche le velocità, che un corpo acquista discendendo per AD, AC, come AD: AC (§ *prec.*). Dunque le velocità, che un corpo acquista scendendo per AD, AB sono nella ragione di quelle, che acquista scendendo per AD, AC. Onde la velocità, che acquista un corpo scendendo per AB è uguale a quella, che acquista scendendo per AC (§ 264 *del tom.* 2). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

CO-

COROLLARIO I.

166. Quindi se un corpo discende da un' orizzontale più alta a un' altra più bassa, acquista sempre l' istessa velocità, o che vi discenda verticalmente, o che vi discenda per piano inclinato di qualsisia inclinazione, e lunghezza.

COROLLARIO II.

Fig. 11. 167. Sia il mezzo cerchio ACB disposto in modo, che il suo diametro AB stia in sito verticale; e sieno in sì fatto mezzo cerchio tirate quante corde si vogliono AC, AD, AE, ec., BC, BD, BE, ec. Di più sieno CF, DG, EH, ec. perpendicolari ad AB, e conseguentemente orizzontali. Saranno le velocità, che un corpo acquisterà scendendo per le corde AC, AD, AE, ec., o per le corde CB, DB, EB, ec. uguali a quelle, che acquisterebbe verticalmente scendendo per AF, AG, AH, ec., o per FB, GB, HB, ec.; e perciò nella ragione delle radici di AF, AG, AH, ec., o di FB, GB, HB, ec.. Ma le radici di AF, AG, AH, ec. sono nella ragione di AC, AD, AE, ec., e le radici di FB, GB, HB, ec. sono nella ragione di CB, DB, EB, ec.. Dunque le velocità, che un corpo può acquistare scendendo e per le cor-

de

de AC, AD, AE, ec., e per le corde CB, DB, EB, ec., sono nella ragione delle istesse corde AC, AD, AE, CB, DB, EB, ec..

TEOR. IX.

168. *Il tempo della discesa d'un corpo per l'intera lunghezza di qualunque piano inclinato AB sia al tempo della discesa per l'altezza AC nella ragione di AB: AC.* Fig. 10.

DIMOSTRAZIONE.

S'intenda da C calata su AB la perpendicolare CD. Sarà il tempo della discesa d'un corpo per AC uguale al tempo della discesa per AD (§164). Dunque, essendo il tempo della discesa per tutta AB al tempo della discesa per AD, come la radice di AB alla radice di AD (§151), e conseguentemente come AB: AC, sarà il tempo della discesa per l'intera AB al tempo della discesa per AC anche nella ragione di AB: AC. Ch'è cio, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

169. Quindi i tempi delle discese d'un corpo per le intere lunghezze di diversi piani inclinati dell'istessa altezza sono tra loro, co-

come le lunghezze de' medesimi piani.

COROLLARIO II.

Fig.11. 170. Sia il mezzo cerchio ACB disposto in modo, che il suo diametro AB stia in sito verticale; e sieno in sì fatto mezzo cerchio tirate quante corde si vogliono AC, AD, AE, ec., BC, BD, BE, ec.. Di più sieno CF, DG, EH, ec. perpendicolari ad AB, e conseguentemente orizzontali. Sarà il tempo della discesa d' un corpo per AC al tempo della discesa per AF, come AC: AF (§168). E' pure il tempo della discesa per AB al tempo della discesa per AF, come la radice di AB alla radice di AF (§135), e perciò come AB: AC, ovvero come AC: AF. Dunque il tempo della discesa d'un corpo per la corda AC è uguale al tempo della discesa pel diametro AB. Similmente il tempo della discesa d'un corpo per CB è al tempo della discesa per FB, come CB: FB (§168). E' anche il tempo della discesa per AB al tempo della discesa per FB, come la radice di AB alla radice di FB, e perciò come AB: BC, ovvero come CB: FB. Sicchè il tempo della discesa d' un corpo per la corda CB è uguale al tempo della discesa pel diametro AB. Dell' istesso modo si dimostra essere il tempo della discesa d' un corpo per qualunque altra delle corde AD, AE, DB, EB,

EB, ec. uguale al tempo della discesa pel diametro AB. Dunque quanto tempo impiega un corpo a discendere per una corda tirata o dal punto A, o dal punto B in qualunque mezzo cerchio ACB, disposto del modo suddetto, altrettanto ne impiega in discendere per ogni altra, o che sia tirata dal punto A, o che sia tirata dal punto B.

AVVERTIMENTO.

171. Ciò che s'è dimostrato della velocità, che acquista ogni corpo scendendo per la lunghezza d'un piano inclinato, e del tempo, che v'impiega, non ha luogo, se il corpo discende per due, o più piani contigui diversamente inclinati al piano orizzontale. Per sapere intanto determinare anche in questo caso la velocità, che acquista un corpo, e 'l tempo, che v'impiega, soggiugniamo i due seguenti problemi. Perciò sia il

PROBL. VII.

172. *Sieno AB, BC due piani contigui diversamente inclinati al piano orizzontale, determinare l'altezza, da cui scendendo un corpo acquista l'istessa velocità, che si trova avere in C, qualora è disceso dal punto A per gli piani AB, BC.*

So-

SOLUZIONE.

1. Da A si cali sul piano CB prolungato la perpendicolare AD.

2. Da D si cali su AB la perpendicolare DE.

3. Finalmente da E si cali sull' orizzontale GC, che passa per C, la perpendicolare EG.

Dico essere EG l' altezza cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Si faccia il rettangolo DH. Esprimendo con AB la forza acquistata dal corpo nella discesa per AB, esprimeranno HB, DB le sue componenti (§69). Onde il corpo entra nel piano BC, come se vi facessero azioni le due forze espresse da HB, DB, e conseguentemente come se vi facesse azione la sola espressa da DB, distruggendosi l'altra per la reazione del piano BC. E perciò la forza intera, che acquista il corpo per AB, sta a quella, con cui entra nel piano BC, come AB: DB; e conseguentemente la velocità intera acquistata dal corpo nella discesa per AB sta a quella, con cui entra in BC, come AB: DB. E' pure la velocità intera, che acquista il corpo nella discesa per AB, alla velocità, che acquisterebbe nella discesa per EB, come la radice di AB alla ra-

radice di EB (§151), e conseguentemente come AB: DB. Sicchè il corpo disceso per AB entra in BC colla velocità, che acquisterebbe per EB, e conseguentemente, tirata per E l'orizzontale EF, e prolungata CD in F, colla velocità, che acquisterebbe per FB (§166). E perciò in C avrà la velocità, che acquisterebbe per FC, e per conseguenza che acquisterebbe per la verticale EG (§165). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

173. Quindi la velocità intera, che acquista un corpo per AB, sta a quella, con cui entra in BC, come AB : BD, o come il seno massimo al coseno dell' angolo ABD, ch' è l' inclinazione de' due piani AB, BC tra loro ; e la medesima velocità intera, che s' acquista per AB, sta a quella, che si perde nell' entrare in BC, come AB: BH, o come AB: AD, o come il seno massimo al seno dell' istesso angolo ABD.

COROLLARIO II.

174. Contrassegnando in oltre AB la velocità acquistata dal corpo per AB, e DB quella, con cui entra in BC ; contrassegnerà la differenza di AB, DB, o sia il seno verso dell'angolo ABD la diminuzione, che fos-

soffre la velocità acquistata per AB nell'entrare il corpo in BC.

COROLLARIO III.

175. Onde se l'angolo ABD è infinitamente picciolo; perchè in tale caso diviene il suo seno AD infinitamente picciolo per rispetto del seno massimo AB, e 'l suo seno verso infinitamente picciolo per rispetto di AD; sarà la diminuzione, che soffre la velocità acquistata per AB nell' entrare il corpo in BC un' infinitamente picciolo d' infinitamente picciolo. Per la qual cosa si possono prendere la velocità, colla quale entra il corpo in BC, come uguale a quella, che acquista per AB, e la velocità, che si trova avere in C, come uguale a quella, che acquisterebbe scendendo per la verticale calata sull' orizzontale CG dal punto A.

AVVERTIMENTO I.

176. Si noti che, date le lunghezze AB, BC, e dati gli angoli ABD, BCG, si può calcolare EG a questo modo. I. Si trovi la quarta proporzionale in ordine al seno massimo, al coseno dell'angolo ABD, e alla lunghezza AB. S' avrà la lunghezza BD. II. Si cerchi la terza proporzionale in ordine ad AB, BD. S'avrà la lunghezza BE. III. Si trovi nel triangolo FEB, di cui sono no-

noti tutti gli angoli, la quarta proporzionale in ordine al ſeno dell' angolo in F, al ſeno dell' angolo BEF, e alla lunghezza BE. S' avrà la lunghezza BF, e conſeguentemente ſi farà nota la lunghezza FG. IV. Finalmente ſi trovi in ordine al ſeno maſſimo, al ſeno dell' angolo in C, e alla lunghezza FC la quarta proporzionale. S' avrà in tale modo l' altezza cercata EG.

AVVERTIMENTO II.

177. Si noti ancora che ſe al piano BC è contiguo un altro, che forma coll'orizzontale un angolo diverſo da BCG; allora, determinato il piano FC, per cui acquiſterebbe *il* corpo l' iſteſſa velocità, che acquiſta nella diſceſa per AB, e BC, ſi determinerà dell' iſteſſo modo l'altezza, per cui acquiſterebbe l' iſteſſa velocità, che avrebbe nella fine del terzo piano, ſe il moto foſſe principiato dal punto F, e conſeguentemente che avrà nella fine del terzo piano, incominciato il moto dal punto A. Similmente ſi dovrà procedere innanzi, ſe ſarà qualunque il numero de' piani diverſamente inclinati all' orizzontale.

AVVERTIMENTO III.

178. Si noti finalmente che, potendoſi ogni ſuperficie curva conſiderare come un

 com-

compoſto d' infiniti piani, inclinati tra loro con angoli infinitamente piccioli, ſi potrà ancora conſiderare la diſceſa d' un corpo per qualunque ſuperficie curva, come una diſceſa per infiniti piccioliſſimi piani diverſamente inclinati all' orizzontale, e inclinati tra loro con angoli infinitamente piccioli. Or perchè la diminuzione, che deve ſoffrire la velocità, che va acquiſtando il corpo in sì fatta diſceſa in ogni paſſaggio da picciolo piano a picciolo piano, deve eſſere un infinitamente picciolo d' infinitamente picciolo; ſarà la ſomma di tutte le infinite diminuzioni, che ſoffrirà la velocità in tutta l' intera diſceſa, una grandezza infinitamente picciola per riſpetto della medeſima velocità. E perciò la velocità, che acquiſta un corpo diſcendo per qualunque ſuperficie curva, ſi può ſenza errore alcuno ſenſibile prendere come uguale a quella, che acquiſterebbe per la verticale compreſa tra le due orizzontali, che paſſano, una pel principio, e l' altra per la fine della diſceſa. Per la qual coſa qualunque corpo, che diſcende da un' orizzontale più alta a un' altra più baſſa, acquiſta ſempre la medeſima velocità, o che vi ſcenda per linea retta, o per curva, o per verticale, o per obbliqua.

PROBL. VIII.

179. *Date le lunghezze di due piani conti-*

tigui AB, BC, diversamente inclinati all'orizzontale, e dati gli angoli ABD, BCG; determinare la ragione del tempo della discesa d'un corpo per AB al tempo, che segue a discendere per BC.

SOZUZIONE.

1. Si determinino del modo già insegnato sì BD, che BF.

2. Si trovi tra FB, e FC la mezza proporzionale FI. Dico essere la ragione di DB: BI la ragione cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo i tempi delle discese d' un corpo per AB, EB, come le radici di AB, BE, (§151), e perciò come le rette AB, DB, o come le rette DB, EB; e i tempi delle discese per EB, FB, come EB : FB; saranno i tempi delle discese per AB, FB nella ragione di DB : FB (§286 *del tom.* 2). E' in oltre il tempo della discesa per FB al tempo della discesa per FC, come le radici di FB, FC (§151), e perciò come le rette FB, FI; e conseguentemente il tempo della discesa per FB al tempo, che segue a discendere per BC, come FB: BI. Dunque, essendo il tempo, che il corpo segue a discendere per BC sempre l'istesso, o che sia

 pri-

prima difcefo per FB, o che fia prima difcefo per AB, farà il tempo della difcefa per AB al tempo, che fegue a difcendere per BC, come DB: BI (§286 *del tom.* 2). Ch'è ciò, che bifognava dimoftrare.

COROLLARIO.

180. Quindi fe fi calcola il tempo, che un corpo può difcendere per AB; con trovare il quarto proporzionale in ordine alle rette DB, BI, e al tempo già calcolato, s'avrà il tempo, che fcenderà per BC, dopo effer prima difcefo per AB.

AVVERTIMENTO.

181. Dell'ifteffo modo, fe fono più di due i piani contigui diverfamente inclinati all'orizzontale, fi può procedere a determinare i tempi, ne' quali un corpo fucceffivamente fegue a difcendere per gli altri piani.

CAP.

CAP. VI.

Della linea, che descrive ogni Proietto, spinto da qualsisia forza proiettile per qualunque direzione inclinata alla verticale, e della velocità del proietto ne' diversi punti della medesima linea.

DEFINIZIONE.

182. Se un corpo si muove per qualunque forza, che ha fatto su di esso una volta azione, e per l'intera sua gravità insieme, che replica in ogni istante l'azione sua; il corpo si dice *Proietto*, e la forza, che ha fatto una volta azione, si chiama *Forza proiettile*.

COROLLARIO I.

183. Quindi una bomba, che si muove cacciata con impeto fuori del mortaro dalla forza della polvere infiammata, è il proietto, e la forza della polvere infiammata è la forza proiettile.

COROLLARIO II.

184. In oltre ogni proietto a cagione della ſola forza proiettile ſi muoverebbe equabilmente per la direzione, ſecondo la quale ella lo ſpinge.

AVVERTIMENTO.

185. Qual ſia la linea, che deſcrive un proietto ſpinto da qualche forza proiettile verticalmente o da giù in ſu, o da ſu in giù, non occorre definirla; poichè è già noto, ritrovandoſi in tali caſi la forza proiettile, e la forza di gravità o interamente oppoſte, o interamente coſpiranti, eſſer ella l'iſteſſa verticale, per cui il proietto viene ſpinto dalla forza proiettile. Qualora poi la direzione della forza proiettile è inclinata alla verticale; ritrovandoſi allora le due dette forze nella mezzana coſpirazione, e oppoſizione, non può il proietto muoverſi nè per la verticale, nè per la direzione della forza proiettile. Qual ſia intanto la linea, che deve in tale caſo deſcrivere il proietto, è ciò, che biſogna determinare. Perciò ſoggiugniamo i due ſeguenti teoremi.

TEOR. X.

Fig.13. 186. *Spinga una forza proiettile qualun-*

que

que corpo per qualsisia direzione AL, diversa dalla verticale AC. Dico che il proietto si muoverà per una linea curva, e che tale curva sarà nel piano delle rette AL, AC.

DIMOSTRAZIONE.

Contrassegnino AD lo spazio, che il proietto correrebbe nel primo istante di tempo per la sola forza proiettile, e AE quello, che correrebbe nel medesimo istante pel solo sforzo della gravità. Fatto il parallelogrammo ED, e, tirata in esso la diagonale AF, sarà AF lo spazietto, che nel primo istante correrà il proietto, facendo insieme azioni ambe le dette forze (§ *61*). Si prolunghi AF in G, finchè sia FG = AF; il proietto nel secondo istante correrebbe FG, se la gravità non replicasse la sua azione. Sia intanto FH lo spazietto, che dovrebbe correre nel secondo istante pel solo nuovo sforzo della gravità; sarà la diagonale FI del parallelogrammo HG lo spazietto, che effettivamente correrà il proietto nel secondo istante; la quale diagonale FI è inclinata ad FG, e conseguentemente ad AF. Similmente si dimostra che in ogni altro istante correrà il proietto uno spazietto inclinato per rispetto di quello corso nell' istante antecedente. Dunque il proietto in ogni istante muterà direzione; e perciò descriverà una linea, di cui ogni parte sarà fuori della

la direzione della sua contigua, e conseguentemente descriverà una curva (§ 13 *del tom.* 2).

In oltre, essendo AF, DF nel piano delle rette AL, AC, nel piano delle medesime rette sono ancora FG, FH, e conseguentemente FI. Similmente si dimostra che ogni altro elemento della curva, che descrive il proietto è nel piano delle rette AL, AC. Dunque l'intera curva, che descrive il proietto, è nel piano delle rette AL, AC. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

TEOR. XI.

Fig. 14. 187. *Sia AMO la curva, che descrive un proietto, spinto dalla forza proiettile per qualunque direzione AL, inclinata alla verticale AR. Dico che tale curva AMO è una Parabola, che ha per tangente in A la retta AL, e per diametro appartenente al medesimo punto A la verticale AR.*

DIMOSTRAZIONE.

S'intendano ad arbitrio tirate quante rette si vogliono PM, QN, RO, ec. parallele ad AL, e MC, ND, OL, ec. parallele ad AR. E' chiaro che intanto che il proietto descrivendo la curva giugnerà da A successivamente in M, in N, in O, ec., do-

dovrebbe giugnere successivamente per la sola forza proiettile in C, in D, in L, ec., e per la sola forza della gravità in P, in Q, in R, ec. Ora, essendo il moto, che avrebbe il proietto per la sola forza proiettile equabile (§184), e per la sola forza della gravità uniformemente accelerato; saranno gli spazj AC, AD, AL, ec. nella ragione de' tempi, ne' quali si correrebbero (§ 49), e gli spazi AP, AQ, AR, ec. nella ragione de' quadrati de' medesimi tempi (§131). Sicchè le rette AP, AQ, AR, ec. sono nella ragione de' quadrati di AC, AD, AL, ec., o di PM, QN, RO, ec.. Per la qual cosa la curva AMO è una parabola, che ha per diametro appartenente al punto A la verticale AR, e per ordinate all'istesso diametro le rette PM, QN, RO, ec., e conseguentemente per tangente nel punto A la retta AL. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

188. Quindi tutt' i diametri della parabola, che descrive un proietto, sono linee verticali.

COROLLARIO II.

189. S'intenda essere BA l'altezza verticale, per cui scendendo liberamente il proietto

to acquisterebbe la velocità impressali dalla forza proiettile. Si tagli AD = 2AB, e si faccia il parallelogrammo DQ. Correrebbe il proietto equabilmente AD colla detta velocità nel tempo della sua discesa libera per BA. Ma nell' istesso tempo scenderebbe anche liberamente per AQ. Sicchè è AQ = AB; e perciò AD, ovvero QN = 2AQ. E' di più il parametro del diametro AR terza proporzionale in ordine ad AQ, e QN (§ 30 *del tom. 6*). Dunque sì fatto parametro è il doppio di QN, e perciò il quadruplo di AQ, o sia di AB.

COROLLARIO III.

190. Per la qual cosa un proietto descrive la parabola AMO, e l'incomincia a descrivere dal punto A, se viene spinto dalla forza proiettile per la tangente della medesima parabola in A, e colla velocità, che acquisterebbe nella libera discesa per la quarta parte del parametro, appartenente al diametro, che ha per vertice l'istesso punto A.

COROLLARIO IV.

191. In oltre qualora è data la posizione delle ordinate d' una parabola relativamente a un suo diametro, ed è dato il parametro dell' istesso diametro, è data ancora la

la parabola; qualora poi varia o la posizione delle ordinate, o la grandezza del parametro, o ambedue tali cose insieme, si muta anche la parabola. Dunque qualora è data la direzione della forza proiettile, ed è data la velocità, ch'ella imprime al proietto, deve essere anche data la parabola, che deve il proietto descrivere; variandosi poi o la detta direzione, o la detta velocità, o ambedue tali cose insieme, si deve variare anche la parabola. Sicchè un proietto può descrivere infinite diverse parabole, secondochè in infinito si varia o la velocità, che l'imprime la forza proiettile, o la direzione della medesima forza, o si variano ambedue tali cose insieme.

AVVERTIMENTO I.

192. Si noti che relativamente alle proiezioni, che si fanno con un istesso mortaro, o con un istesso cannone la velocità, che la forza proiettile imprime al proietto è in tutt' i tiri sempre l'istessa, se il mortaro, o il cannone ha sempre l'istessa carica, cioè se la bomba, o la palla è sempre dell'istesso peso, e la polvere sempre dell' istessa misura, ed efficacia; si muta poi la detta velocità, se si muta o il peso del proietto, o la quantità della polvere, o la sua efficacia. Qualora in tutt' i tiri il peso del proietto è sempre l'istesso, e sempre l'istes-

sa

sa l'efficacia della polvere, si varia allora la detta velocità, se si varia la quantità della polvere; però non si varia l'una a proporzione dell'altra. Se la polvere accesa nelle armi da fuoco si dilatasse tutta in uno spazio costante, e invariabile, l'azione, che farebbe, sarebbe proporzionale alla quantità sua, e conseguentemente alla medesima quantità sarebbe proporzionale la velocità, che comunicherebbe al corpo da lei spinto; ma come nell'istesso brevissimo tempo, che si va ella accendendo, il corpo, che spinge si va movendo per entro l'arma, e si va conseguentemente accrescendo lo spazio, in cui segue la detta dilatazione; così non può una doppia, tripla, quadrupla, ec. quantità di polvere accesa in un cannone spingere la palla con una velocità doppia, tripla, quadrupla, ec., ma deve in maggior ragione crescere la quantità della polvere di quello cresce la velocità, che comunica al corpo. Quindi è che quanto più le quantità diverse dell'istessa polvere sono picciole, tanto più alla loro ragione s'avvicina quella delle velocità, che comunicano all'istesso corpo, e quanto più divengono grandi, tanto più se ne allontana. E' da notarsi però che per ogni arma da fuoco, ancorchè cresca la velocità, che la polvere infiammata comunica al corpo, che spinge, col crescere la quantità dell'istessa polvere; ciò però ha certo determinato limite, che non si può oltrepassare, sen-

senza fare , che la detta velocità divenghi minore anzi , che maggiore . La quantità di polvere , che imprime in ogni arma la massima velocità al corpo , che spinge , è quella , che s' accende interamente intanto che il corpo corre la lunghezza dell' arma , che ha bisogno di correre per uscire da lei; una quantità minore imprime velocità minore; e una quantità maggiore , col diminuire la lunghezza , che corre il corpo entro dell' arma, fa che il corpo riceva quella velocità minore , che può comunicarle quella minore quantità di polvere , che si può accendere intanto che il corpo corre la detta lunghezza minore.

AVVERTIMENTO II.

193. Se la velocità , che la forza proiettile imprime al proietto, è sempre l'istessa, cioè sempre uguale a quella, che il projetto acquisterebbe nella libera discesa per BA; ognuna delle infinite diverse parabole, che può il proietto descrivere , secondochè in infinito si varia la direzione AL della forza proiettile, ha l' istesso parametro relativamente al diametro , che ha per vertice il punto, da cui s' incomincia a descrivere; perchè sempre è il quadruplo di AB. Anzi tutte le dette infinite parabole hanno per direttrice comune l' orizzontale BD , che passa pel punto B (§ 4 *del tom. 6*), hanno

Fig. 15.

no i loro fuochi nella periferia del cerchio BFHI defcritto col centro A, e coll' intervallo AB (§ 4 *del tom. 6*); e farà il fuoco d' ognuna in quel punto della detta periferia, per cui paffa il raggio, che forma con AL un angolo uguale a BAL (§ 21 *del tom. 6*).

COROLLARIO V.

194. Quindi, qualora è data l' altezza AB, ed è dato l' angolo BAL, facendo l' angolo LAF = LAB, fi ha il fuoco F della parabola AMN, che defcrive il proietto, fpinto dalla forza proiettile per la direzione AL colla velocità, che acquiftérebbe nella libera difcefa per BA: anzi, fe da F s' intende calata FC perpendicolare alla direttrice BD, e s' intende divifa in M in due parti uguali, farà M il vertice dell' affe (§ 7 *del tom. 6*), e 'l doppio di FC farà il parametro dell' affe (§ 8 *del tom. 6*); e finalmente, fe s' intende per M tirata l' orizzontale MG, e s' intende congiunta la BF, tali rette pafferanno ambedue pel punto E della retta AL, ambedue faranno in E divife in due parti uguali, e l' angolo AEB farà retto.

COROLLARIO VI.

195. Sicchè quanto più l' angolo BAL fa-

farà picciolo, tanto più il fuoco della parabola s' avvicinerà alla direttrice BD. Se l' angolo BAL farà la metà d' un retto, l' angolo BAF farà retto; e in tale caso il fuoco della parabola caderà nell' orizzontale procedente dal punto A, e'l parametro dell' asse farà 2AB. Se poi l' angolo BAL farà retto, il fuoco della parabola caderà allora nel punto H della verticale BA prolungata, e'l parametro dell' asse farà 4AB. Se finalmente l' angolo BAL farà ottuso, il fuoco allora della parabola caderà dall' altra parte della retta BH, e 'l proietto descriverà un arco parabolico, che non giugnerà al vertice dell' asse.

TEOR. XII.

196. *Qualunque sia la parabola SAO, che descrive un proietto, la velocità, che ha egli in qualunque punto di SAO, è uguale a quella, che acquisterebbe nella libera discesa per la quarta parte del parametro appartenente al diametro, che ha per vertice il medesimo punto.* Fig.1[illegible]

DIMOSTRAZIONE.

Se la gravità cessasse di fare azione in qualunque punto A, cesserebbe il proietto di descrivere la parabola SAO, e si muoverebbe equabilmente colla velocità, che av-

avrebbe in A per la tangente AL. S' intenda essere AB la verticale, nella cui discesa libera acquisterebbe il proietto la velocità, che ha in A; e si tagli AD=2BA. Correrebbe il proietto equabilmente AD colla detta velocità nel tempo, che scenderebbe per BA (§127). Ma, fatto il parallelogrammo DQ, nell' istesso tempo corre AN, e conseguentemente per la sola azione della gravità correrebbe AQ. Dunque è AQ = AB; e perciò AD, ovvero QN = 2AQ, e conseguentemente il parametro di AR è = 2QN (§ 30 *del tom. 6*) =4AQ = 4AB. Sicchè la velocità del proietto in qualunque punto A della parabola SAO, che descrive, è uguale a quella, che acquisterebbe nella libera discesa per la quarta parte del parametro appartenente al diametro, che ha per vertice l' istesso punto A. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

197. Essendo le rette tirate dagli diversi punti d' una parabola al suo fuoco, o calate dagl' istessi punti perpendicolari alla direttrice le quarte parti de' parametri appartenenti a' diametri, che hanno per vertici i medesimi punti (§ 8 *del tom. 6*); saranno le velocità d' un proietto ne' diversi punti della parabola, che descrive, come le radici delle rette tirate dagli medesimi punti

ti al fuoco, o calate dagl' isteſſi punti perpendicolari alla direttrice.

COROLLARIO II.

198. Avendo in oltre l' aſſe di qualunque parabola il minimo parametro, i diametri ugualmente diſtanti dall' aſſe parametri uguali, e 'l diametro più lontano dall'aſſe parametro maggiore di quello del diametro più vicino all' iſteſſo aſſe (§ 19 *del tom. 6*); sarà la velocità d' un proietto nel vertice dell' aſſe della parabola, che deſcrive, la minima, ne' punti ugualmente diſtanti dal detto vertice l' iſteſſa, e sarà ſempre vie più maggiore, quanto più il punto sarà diſtante dal vertice dell' aſſe. Quindi nel deſcrivere un proietto qualunque parabola la ſua velocità nell' andarſi avvicinando al vertice dell' aſſe ſi va ſucceſſivamente diminuendo, e nell' andarſi allontanando dall' iſteſſo vertice ſi va continuamente accreſcendo.

CAP. VII.

Delle leggi, che osservano i Proietti nel descrivere parabole.

DEFINIZIONE I.

199. Diciamo *Punto della proiezione* quello, da cui incomincia il proietto a descrivere la parabola.

DEFINIZIONE II.

200. Chiamiamo *Linea del tiro* la retta, in cui si trovano il punto della proiezione, e'l punto, nel quale il proietto finisce di descrivere la parabola.

DEFINIZIONE III.

201. Diciamo *Lunghezza del tiro* quella porzione della linea del tiro, che congiugne gli estremi dell' arco parabolico, che il proietto descrive.

DE-

DEFINIZIONE IV.

202. Si dice *Ampiezza della parabola* la lunghezza del tiro, qualora la linea del tiro è orizzontale.

DEFINIZIONE V.

203. Chiamiamo *Linea della velocità* la verticale, per cui dovrebbe ſcendere liberamente il proietto per acquiſtare la velocità, che l'imprime la forza proiettile.

DEFINIZIONE VI.

204. Diciamo *Angolo della proiezione* quello, che forma la direzione della forza proiettile colla verticale, procedente dal punto della proiezione verſo la parte ſuperiore.

DEFINIZIONE VII.

205. Diciamo *Angolo di elevazione, o di depreſſione* quello, che forma la direzione della forza proiettile coll' orizzontale, ſecondochè la direzione della forza proiettile cade ſopra, o ſotto l' orizzontale.

DEFINIZIONE VIII.

206. Chiamiamo *Tiro massimo* quello, in cui il proietto va alla distanza, ch'è massima di tutte le infinite altre, alle quali potrebbe giugnere, spinto sempre dalla forza proiettile colla medesima velocità, e con infiniti diversi angoli di proiezione.

TEOR. XIII.

Fig.16. 17., e 18. 207. *Sieno A il punto della proiezione; AL la direzione della forza proiettile, AB la verticale, che passa per A, e AR. la linea del tiro, e questa sia o orizzontale, o comunque inclinata all' orizzontale AQ. Dico che in tutt' i casi il tiro è il massimo, se l' angolo della proiezione BAL è la metà dell' angolo BAR.*

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda essere BA la linea della velocità; e, descritto il cerchio BFC col centro A, e coll' intervallo AB, s' intenda per B tirata l' orizzontale indefinita BI. Sia inoltre l' angolo BAL la metà di BAR. Sarà F il fuoco della parabola, che descrive il proietto, e BI la direttrice (§ 193). S' intenda essere AMN sì fatta parabola; e da N s' intenda calata sulla diret-

rettrice BI la perpendicolare NE. Sarà NE = NF (§ 7 *del tom. 6*); onde il cerchio EF descritto col centro N, e coll'intervallo NE toccherà l'altro BFC in F. Or se si prende in AR qualunque altro punto G più distante da A del punto N, e da G si cala su BI la perpendicolare GI; essendo sempre GI minore di GF, il cerchio descritto col centro G, e coll' intervallo GI non può nè intersecare, nè toccare il cerchio BFC. Dunque niun' altra parabola vi può essere, che abbia il fuoco nella periferia BFC, per direttrice BI, e giunga al di là del punto N. Ma tutte le infinite diverse parabole, che con variare all' infinito l'angolo della proiezione BAL si possono descrivere da un proietto, spinto dalla forza proiettile colla velocità, che acquisterebbe per BA, debbono avere i loro fuochi nella periferia BFC, e per direttrice comune BI (§193). Dunque di tutti gl' infiniti tiri, che si possono fare con variare all' infinito l' angolo della proiezione BAL, dando la forza proiettile sempre al proietto la velocità, che egli acquisterebbe per BA, il massimo è quello, ch' è fatto, quando l'angolo BAL è la metà dell'angolo BAR. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

208. Si noti che nel caso della figura

18 si dimostra essere GI minore di GF a questo modo. Per N si tiri NK parallela a BI. Essendo KI = NE = NF, e GK minore di GN; sarà GI minore ancora di GF.

Pel caso della linea del tiro AR orizzontale.

COROLLARIO I.

Fig. 16. 209. Essendo l' angolo BAR di 90°, s' avrà il tiro massimo, se l' angolo della proiezione BAL sarà di 45°, e conseguentemente di 45° l'angolo di elevazione LAR.

COROLLARIO II.

210. Essendo in oltre AB = NE, e conseguentemente AF = FN, sarà AB = $\frac{1}{2}$AN. Sicchè la linea della velocità è la metà dell' ampiezza del tiro massimo.

COROLLARIO III.

211. Da F si cali su BI la perpendicolare FD. Sarà FM = $\frac{1}{2}$FD = $\frac{1}{2}$AB = $\frac{1}{4}$AN. Dunque l' altezza massima della parabola AMN è la metà della linea della velocità, o la quarta parte dell' ampiezza dell' istessa parabola AMN.

CO-

COROLLARIO IV.

212. Essendo di più AF = FN, e FM = $\frac{1}{2}$AF; sarà la velocità, colla quale giugne il proietto in N uguale a quella, che ha avuto in A dalla forza proiettile, e sarà la velocità in M alla velocità in A, o in N, come $1 : \sqrt{2}$.

COROLLARIO V.

213. Per N si tiri NS parallela ad AL. Sarà AS = AN; e sarà il tempo della discesa libera del proietto per AS uguale al tempo, che corre la parabola AMN. Sicchè il tempo, in cui il proietto corre la parabola nel tiro massimo, è uguale a quello, in cui liberamente scenderebbe per una verticale uguale all' ampiezza dell' istessa parabola.

Pel caso della linea del tiro AR inclinata all' orizzontale AQ.

COROLLARIO VI.

214. Essendo l' angolo BAR minore, o maggiore dell' angolo retto BAQ di quant' è l' angolo RAQ; s' avrà il tiro massimo, se l' angolo della proiezione BAL sarà minore, o maggiore dell' angolo di 45° di quant' Fig. 17, e 18.

quant' è la metà dell' angolo RAQ. Onde, se l'angolo RAQ sarà di 20°, s'avrà il tiro massimo, se sarà l'angolo BAL nel primo caso di 35°, e nel caso secondo di 55°.

COROLLARIO VII.

215. Essendo in oltre AN = AF + FN = AB + NE; sarà la lunghezza del tiro massimo nel primo caso minore di 2AB, e nel secondo caso maggiore.

COROLLARIO VIII.

216. Da F si cali su BI la perpendicolare FD. Sarà FM = $\frac{1}{2}$FD. Dunque l' altezza massima FM della parabola AMN è nel primo caso minore di $\frac{1}{2}$AB, e maggiore di $\frac{1}{2}$NE, e nel secondo caso è maggiore di $\frac{1}{2}$AB, e minore di $\frac{1}{2}$NE.

COROLLARIO IX.

217. Essendo finalmente NF minore nel primo caso di AF, e maggiore nel caso secondo, ed MF nel primo caso minore di $\frac{1}{2}$AF, e maggiore di $\frac{1}{2}$NF, e nel secondo caso maggiore di $\frac{1}{2}$AF, e minore di $\frac{1}{2}$NF; sarà la velocità, colla quale giugne il proietto in N nel primo caso minore di quella, che ha avuto in A dalla forza proiet-

iettile, e nel fecondo cafo maggiore; e farà la velocità in M alla velocità in A nel primo cafo in minore ragione di $1 : \sqrt{2}$, e nel fecondo cafo in ragione maggiore.

TEOR. XIV.

218. *Sieno A il punto della proiezione, AB la linea della velocità, AR la linea del tiro, e quefta fia orizzontale, o comunque inclinata all'orizzontale AQ, e AN la lunghezza del tiro maffimo. Dico che, prefa AO minore di AN, il proietto fpinto dalla forza proiettile colla velocità, che acquifterebbe per BA, può giugnere da A in O per due diverfe parabole, e che i due angoli delle proiezioni, neceffarj per giugnere da A in O, hanno uguali differenze con quello del tiro maffimo.* Fig. 19. 20, e 21.

DIMOSTRAZIONE.

Col centro A, e coll' intervallo AB fi defcriva il cerchio BCK. Per B fi tiri l'orizzontale indefinita BE; e da N, e O fi calino fu BE le perpendicolari NE, OD. Effendo AN la lunghezza del tiro maffimo, farà NE = NC; onde farà OD maggiore di OC. E perciò il cerchio defcritto col centro O, e coll' intervallo OD, cioè il cerchio DFF deve interfecare BCK in due punti F, e F. Ma il fuoco della parabola, per cui deve il proietto giugnere da A in O,

O, deve effere quel punto della periferia BCK, ch'è tanto diftante da O, quant' è OD. Sicchè, effendo due i punti F, e F della periferia BCK, che fono diftanti da O di quant' è OD, due poffono effere le parabole diverfe, per cui un proietto, fpinto dalla forza proiettile colla velocità, che acquifterebbe per la verticale BA, può giugnere da A in O.

In oltre, congiunte le rette AF, AF, effendo gli angoli FAC, FAC uguali, uguali fa-ranno le differenze, che paffano tra gli angoli BAF, BAF, e l'angolo BAC, ed uguali confeguentemente le differenze, che paffano tra le metà degli angoli BAF, BAF, e la metà dell' angolo BAC. Sicchè i due angoli delle proiezioni, neceffarj per giugnere il proietto da A in O fpinto dalla forza proiettile colla velocità, che acquifterebbe nella libera difcefa per BA, hanno uguali differenze con quello del tiro maffimo. Ch' è quanto bifognava dimoftrare.

COROLLARIO I.

219. E' chiaro effere i due fuochi F, e F in una verticale, fe la linea del tiro AR è orizzontale, ed effere in verticali diverfe, fe AR è inclinata all' orizzontale AQ.

Pel caso della linea del tiro AR orizzontale.

COROLLARIO II.

220. Sieno AMO, AMO le due parabole, per le quali il proietto, spinto colla velocità, che acquisterebbe per BA, si può condurre da A in O; e sieno altresì F, e F i fuochi delle medesime parabole, e BAL, BAL i due angoli delle proiezioni. Si congiunga la retta FF, e si prolunghi, finchè incontri le parabole ne' punti M, e M, che sono i vertici degli assi. Dagli punti M, M, F, F s'intendano calate su BK le perpendicolari MG, MG, FH, FH. Essendo AB = AF, e $\frac{1}{2}$AO = AP = FH; sarà AB : $\frac{1}{2}$AO = AF : HF. Sicchè la linea della velocità sta alla metà dell' ampiezza della parabola, come il seno massimo al seno dell' angolo BAF, ch' è il doppio dell'angolo della proiezione BAL. Fig.19.

COROLLARIO III.

221. Quindi, se l'angolo della proiezione è di 15°, sarà la linea della velocità alla metà dell'ampiezza della parabola, come il seno massimo al seno di 30°, o come 2 : 1 (§ 9 *del tom.* 5). Sicchè la linea

nea della velocità è uguale all'ampiezza della parabola, se l'angolo della proiezione è di 15°, o conseguentemente di 75°, ovvero se l'angolo di elevazione è di 75°, o di 15°.

COROLLARIO IV.

222. E perciò l'ampiezza della parabola, qualora l'angolo di elevazione è di 15°, o di 75°, è la metà dell'ampiezza del tiro massimo (§ 210).

COROLLARIO V.

223. Essendo la linea della velocità alla metà dell'ampiezza della parabola, come il seno massimo al seno dell'angolo doppio di quello della proiezione; saranno in tiri fatti da un mortaro coll'istessa carica, ma con diversi angoli di proiezioni le ampiezze delle parabole nella ragione de' seni degli angoli doppj di quelli delle proiezioni, e conseguentemente nella ragione de' seni degli angoli doppj di quelli dell'elevazioni; essendo il doppio d'un angolo d'elevazione il compimento a due retti del doppio dell'angolo della proiezione.

COROLLARIO VI.

224. In oltre, essendo PM = AG, e GT

$GT = \frac{1}{2}$ GM (§194) $= \frac{1}{4}$AO; farà $\frac{1}{4}$AO: PM = GT : AG. Dunque la quarta parte dell' ampiezza della parabola sta alla sua altezza massima, come il seno massimo alla cotangente dell'angolo della proiezione.

COROLLARIO VII.

225. Si congiunga TB. Sarà l' angolo ATB retto (§194); e perciò farà BA : AG = $BA^2 : AT^2$. Sicchè la linea della velocità sta all'altezza massima della parabola, come il quadrato del seno massimo al quadrato del coseno dell' angolo della proiezione. E perciò in tiri fatti da un mortaro coll' istessa carica, ma con diversi angoli di proiezioni, le altezze massime delle parabole saranno come i quadrati de' coseni degli angoli delle proiezioni, e conseguentemente come i seni versi de' doppj degli angoli dell' elevazioni.

COROLLARIO VIII.

226. S'intenda per O tirata OS parallela ad AL. Sarà AO: AS = GT: GA. Onde, essendo AO il quadruplo di GT, sarà AS anche il quadruplo di GA, o di PM. Ma il proietto corre la parabola AMO nel medesimo tempo, che scenderebbe liberamente per la verticale AS, e conseguentemente nel doppio del tempo, che scenderebbe per PM.

PM. Sicchè il tempo della discesa d'un corpo per BA sta al tempo, che impiega il proietto a correre la parabola AMO, come la radice di BA al doppio della radice di AG, o come BA: 2AT, ovvero come il seno massimo al doppio del coseno dell'angolo della proiezione. E perciò in tiri fatti da un mortaro coll'istessa carica, ma con diversi angoli di proiezioni, i tempi, ne' quali i proietti descrivono le parabole, sono nella ragione de'coseni degli angoli delle proiezioni, e conseguentemente nella ragione de seni degli angoli dell'elevazioni.

COROLLARIO IX.

227. Essendo di vantaggio $\frac{1}{2}$AO : AB, come il seno del doppio dell' angolo della proiezione al seno massimo; ne' tiri fatti da un mortaro coll'istesso angolo di proiezione, ma con quantità diverse di polvere saranno le ampiezze delle parabole nella ragione delle altezze, per le quali bombe uguali acquisterebbero liberamente scendendo le velocità impresse loro dalle forze proiettili, e conseguentemente come i quadrati delle medesime velocità.

COROLLARIO X.

228. Finalmente, essendo l'altezza massi-

ſima PM della parabola alla verticale AB, come il quadrato del coſeno dell'angolo della proiezione al quadrato del ſeno maſſimo (§ 225); ne'tiri fatti da un mortaro coll'iſteſſo angolo di proiezione, ma con quantità di polvere diverſe ſaranno le altezze maſſime delle parabole, come le verticali, per le quali bombe uguali acquiſterebbero liberamente ſcendendo le velocità impreſſe loro dalle forze proiettili, e conſeguentemente come i quadrati delle medeſime velocità.

CAP. VIII.

Si ſciolgono tutt' i problemi appartenenti al moto de' Proietti.

DEFINIZIONE.

229. Si dice *Tiro di pruova* d'un mortaro, o d'un cannone quello, che ſi fa con qualſivoglia angolo di proiezione, per poter conoſcere coll' effettiva miſura la ſua vera lunghezza.

AVVERTIMENTO I.

230. Si noti che il tiro di pruova d'un mortaro, o d'un cannone ſi può fare, o che

la linea del tiro sia orizzontale, o che no.

AVVERTIMENTO II.

231. Si noti ancora che, potendosi il moto d' un proietto alterare per più accidenti, per accertare la lunghezza del tiro di pruova d' un mortaro, o d' un cannone, conviene fare più tiri simili, cioè più tiri coll'istessa carica, e coll' istesso angolo di proiezione. Si ricaverà poi la vera lunghezza del detto tiro di pruova dalla somma delle lunghezze misurate di tutti que' tiri simili, ne' quali s' osserverà poca differenza, divisa pel numero de' medesimi tiri.

COROLLARIO.

232. Sicchè, dato il tiro di pruova d'un mortaro, o d' un cannone, è data la lunghezza di sì fatto tiro, ed è dato l' angolo della proiezione.

PROBL. IX.

233. *Dato il tiro di pruova d' un mortaro, o d' un cannone, determinare la linea della velocità.*

SOLUZIONE.

S' intendano essere AB la linea cercata della velocità, BAL l' angolo della proiezione, col quale s'è fatto il tiro di pruova, e AMO la parabola descritta nel medesimo tiro. Sarà l' angolo BAL noto, e sarà nota la lunghezza AO del detto tiro. Due casi possono accadere, o la linea del tiro AR è orizzontale, o è inclinata all' orizzontale AQ. Nel

Fig. 19, 20, e 21.

CASO I.

Si trovi in ordine al seno del doppio dell' angolo BAL, al seno massimo, e ad $\frac{1}{2}$AO la quarta proporzionale; darà sì fatta quarta proporzionale la linea AB cercata (§ 220). Nel

Fig. 19.

CASO II.

Per O s'intendano tirate la verticale OL, che s'unisca con AL in L, e la retta OS parallela ad AL. Dovendo essere 4BA, SO, SA continuamente proporzionali, continuamente proporzionali saranno ancora 4AB, AL, LO. Perciò

Fig. 20. e 21.

1. Nel triangolo LOA, essendo noti l' angolo LOA, come supplimento a due retti dell' angolo BAR, l'angolo OLA, come

I 2 ugua-

uguale all' angolo BAL , e 'l lato AO, si determinino OL, LA.

2. In ordine ad OL , LA si trovi la terza proporzionale.

Sarà la quarta parte di sì fatta terza proporzionale la retta cercata AB. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

AVVERTIMENTO I.

Fig.19. 234. Si noti che nel caso della linea del tiro orizzontale, se l' angolo della proiezione , col quale s' è fatto il tiro di pruova, è di 15°, o di 75°, ovvero di 75°, o di 15° l' angolo di elevazione, la verticale AB è uguale allora all' ampiezza AO (§ 221); e se è di 45° l' angolo della proiezione, o della elevazione, la verticale AB è la metà in tale caso dell' ampiezza AO (§ 210).

COROLLARIO.

235. Quindi per avere la linea della velocità relativamente a qualunque carica d' un mortaro, o d' un cannone senza bisogno di calcolo, conviene fare il tiro di pruova in modo, che la linea del tiro sia orizzontale, e che l' angolo d' elevazione sia di 15°, o di 75°, o di 45°.

AV-

AVVERTIMENTO II.

236. Si noti ancora che la linea della velocità, determinata relativamente alla carica data a un mortaro, o cannone nel tiro di pruova, vale per tutt' i tiri, che si possono fare coll'istesso mortaro, o cannone, purchè per tutt' i tiri s' adopri sempre la medesima carica.

PROBL. X.

237. *Data la linea della velocità AB, e dato l' angolo della proiezione BAL, determinare la lunghezza AO del tiro.* Fig. 19. 20, e 21.

SOLUZIONE.

O la linea del tiro AR è orizzontale, o è inclinata all'orizzontale AQ. Nel

CASO I.

Si trovi in ordine al seno massimo, al seno del doppio dell' angolo BAL, e alla verticale AB il quarto proporzionale; darà il doppio di sì fatto quarto proporzionale la lunghezza cercata AO del tiro (§220). Nel

CASO II.

Fig. 20, e 21. S'intendano, prolungata AB in V, finchè sia AV = 4AB, per O tirata la verticale OL, che s'unisca con AL in L, e congiunta LV: Essendo VA, AL, LO continuamente proporzionali, ed essendo l'angolo VAL = ALO; saranno l'angolo ALV = LOA, e AVL = LAO. Perciò

1. Nel triangolo ALV, essendo noti l'angolo VAL, perchè è dato, l'angolo AVL, perchè uguale a LAR, e'l lato AV, si determini il lato AL.

2. Nel triangolo AOL, essendo noti tutti gli angoli, e'l lato AL, si determini AO.

S'avrà in tal modo la lunghezza cercata AO del tiro. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO.

238. Se l'angolo BAL è la metà dell'angolo BAR, AO allora è la lunghezza del tiro massimo (§207). E' chiaro dunque il modo di determinare la lunghezza del tiro massimo, qualora s'è già determinata la linea della velocità coll'ajuto d'un tiro di pruova fatto con qualunque angolo di proiezione.

AV-

AVVERTIMENTO I.

239. Si noti che se in ordine ad VA, AL si trova la terza proporzionale LO, s' avrà la verticale, per cui ogni corpo vi discende in tanto tempo, in quanto tempo il proietto descrive la parabola AMO.

AVVERTIMENTO II.

240. Si noti ancora che, tirata per O l'orizzontale OG, e determinata nel triangolo rettangolo la AG, si fa nota GB, o OD; vale a dire che si fa nota l' altezza, da cui dovrebbe il proietto discendere per acquistare la velocità, colla quale giugne nel punto O.

PROBL. XI.

241. *Date la linea AB della velocità, e la lunghezza AO del tiro, determinare gli angoli della proiezione.* Fig.19. 20, e 21.

Soluzione.

O la linea del tiro AR è orizzontale, o è inclinata all'orizzontale AQ. Nel

CASO I.

Fig. 19. 1. In ordine ad AB, ad $\frac{1}{2}$ AO, e al ſeno maſſimo ſi trovi il quarto proporzionale; s' avrà il ſeno del doppio degli angoli cercati (§ 220).

2. Si cerchi nelle Tavole l' angolo corriſpondente al ſeno trovato.

La metà di sì fatto angolo ſarà uno degli angoli cercati, e la metà del ſuo conſeguente ſarà l' altro. Nel

CASO II.

Fig. 20, e 21. S' intendano eſſere F, e F i fuochi delle due parabole; s' intendano congiunte le rette AF, AF, OF, OF; e finalmente per O s' intenda tirata l' orizzontale OG.

1. Nel triangolo rettangolo OGA, eſſendo noti l' angolo GAO, e 'l lato AO, ſi determini AG. Si farà nota anche BG, o ſia OD, ovvero OF.

2. Nel triangolo AFO, eſſendo noti tutt' i lati AF, FO, AO, ſi determini l' angolo FAO.

La metà della differenza dell' angolo FAO da BAR darà uno degli angoli cercati, e la metà della ſomma de' medeſimi angoli BAR, FAO darà l' altro angolo cercato. Ch' è quanto biſognava determinare.

AV-

AVVERTIMENTO I.

242. Si noti che avendo determinata OD, s' è determinata la verticale, per cui ogni corpo vi acquista liberamente scendendo la velocità, colla quale il proietto giugne in O.

AVVERTIMENTO II.

243. Se, determinato l'angolo BAL della proiezione, e tirata per O la OS parallela ad AL, si determinano prima nel triangolo OGA il lato OG, e poscia nel triangolo OGS il lato GS, si farà nota anche AS; vale a dire che si farà nota la verticale, per cui ogni corpo vi discende in tanto tempo, in quanto tempo il proietto descrive la parabola AMO.

PROBL. XII.

244. *Dato l'angolo della proiezione BAL, minore di 90°; e data la linea della velocità BA; determinare la verticale, che tramezza tra 'l vertice dell'asse della parabola, che descrive il proietto, e la linea del tiro.*

Fig. 19, 20, e 21.

SOLUZIONE.

S' intendano essere AMO la parabola, che do-

descrive il proietto, F il suo fuoco, AR la linea del tiro, e PM la verticale, che passa per F; sarà M il vertice dell' asse. Si prolunghi in oltre PM, finchè incontri la direttrice BE in I; e per F si tiri l' orizzontale FH.

1. Nel triangolo rettangolo AHF, essendo noti l' angolo HAF, e 'l lato AF, si determini AH. Si farà nota ancora HB, e conseguentemente FI. Onde nota si farà pure la sua metà FM.

2. Nel triangolo FPA, essendo noti l' angolo PFA, come uguale a FAB, l' angolo FPA, come retto, o supplimento a due retti dell' angolo BAR, e 'l lato AF, si determini FP.

Determinate FM, FP, sarà nota la verticale cercata MP. Ch' è ciò, che bisognava determinare.

PROBL. XIII.

245. *Costruire alcune Tavole, per mezzo delle quali, qualora la linea del tiro è orizzontale, si possa, dato l' angolo della proiezione, sapere l' ampiezza della parabola, e la sua altezza massima, e, data l' ampiezza, sapere l' angolo della proiezione.*

SOLUZIONE.

1. Si faccia con un mortaro un tiro di pruo-

pruova, e si determini la linea della velocità, che compete alla carica, colla quale s'è fatto il tiro.

2. Coll'ajuto della linea della velocità già determinata si vadano successivamente determinando le ampiezze, e le altezze delle parabole, che può descrivere l'istesso proietto, convenienti agli angoli delle proiezioni, che procedono da quello di 1' fino a quello di 45° relativamente alle ampiezze, e fino a quello di 90° relativamente alle altezze, e vi procedono coll' accrescimento continuo di 10'.

3. Si notino in più tavole in tre colonne distinte, e in corrispondenza gli angoli delle proiezioni, le ampiezze, e le altezze delle parabole già determinate.

S'avranno in tal modo le Tavole cercate.

PROB XIV.

246. *Supposto che sieno costrutte le dette Tavole, insegnare i modi di determinare col loro ajuto l' ampiezza della parabola, e la sua altezza massima, qualora è dato l' angolo della proiezione, e di determinare l' angolo, qualora è data l' ampiezza, o l' altezza massima.*

Soluzione.

O la velocità, colla quale viene spinto il proietto è l'istessa di quella, relativamente

te a cui si sono costrutte le Tavole, o è diversa. Nel

CASO I.

I. Sia dato l' angolo della proiezione. Si cerchi nelle Tavole sì fatto angolo; se s' incontra egli in esse con esattezza, saranno l' ampiezza della parabola, e l' altezza massima quali si trovano nelle Tavole in corrispondenza del detto angolo; se poi non s' incontra con esattezza, si determinano l' ampiezza della parabola, e l' altezza massima del modo che coll' ajuto delle Tavole trigonometriche si determina il seno d' un angolo, che non s' incontra con esattezza nelle medesime Tavole.

II. Sia data l' ampiezza della parabola, o la sua altezza massima. Si cerchi sì fatta ampiezza, o altezza nelle Tavole; se s' incontra in esse con esattezza, l' angolo corrispondente sarà l' angolo della proiezione; se poi non s' incontra con esattezza, si determini allora l' angolo della proiezione del modo che si determina l' angolo corrispondente a un dato seno, che non s' incontra esattamente nelle Tavole trigonometriche. Nel

CASO II.

I. Si determini prima la ragione della velocità, relativamente a cui sono state costrut-

ſtrutte le Tavole alla velocità, che la forza proiettile, che ſi vuole adoperare, imprime al proietto; e ſia sì fatta ragione quella di M : N.

2. Se è dato l'angolo della proiezione, ſi cerchi prima coll'ajuto delle Tavole l'ampiezza corriſpondente, come nel caſo precedente, e poſcia ſi trovi in ordine a M, a N, e all'ampiezza trovata il quarto proporzionale; sì fatto quarto proporzionale darà l'ampiezza cercata della parabola. Se è data l'ampiezza, ſi trovi prima in ordine a N, a M, e all'ampiezza data il quarto proporzionale, e poſcia ſi determini coll'ajuto delle Tavole l'angolo corriſpondente al quarto proporzionale trovato, conſiderato come ampiezza; e s'avrà l'angolo cercato della proiezione. Dell'iſteſſo modo ſi proceda per riſpetto dell'altezza maſſima della parabola. Ch'è quanto biſognava inſegnare.

AVVERTIMENTO I.

247. Si noti che, per determinare la ragione di M : N, baſta fare un tiro di pruova con qualunque angolo di proiezione, per eſempio coll'angolo di 8°, dando però al proietto la velocità, che ſi vuole paragonare con quella, relativamente a cui ſono ſtate coſtrutte le Tavole; poichè la radice dell'ampiezza, che ſi trova nelle tavole in corriſpondenza dell'angolo di 8° alla radice dell'

dell' ampiezza , che si determina col detto tiro di pruova , ha la ragione cercata di M : N (§227).

AVVERTIMENTO II.

248. Si noti di più che le dette Tavole sono di qualche vantaggio nella pratica ; perchè col loro ajuto si determinano le ampiezze, e le altezze massime delle parabole, qualora sono dati gli angoli delle proiezioni , e gli angoli delle proiezioni , qualora sono date le ampiezze , o le altezze delle parabole senza bisogno di calcolo, o con un calcolo assai facile ; però un sì fatto vantaggio si sperimenta solamente nel caso , quando la linea del tiro è orizzontale, vale a dire quando il determinare le dette cose col calcolo non esige operazioni complicate, e lunghe. Soggiugnerò intanto uno strumento suggeritemi dalle riflessioni fatte nel trattare la teorica già esposta del moto de' proietti, che chiamerò *Compasso balistico*, e che riuscirà, se non m' inganno, d' un compiuto vantaggio per la pratica ; perchè col suo ajuto si possono sciorre tutt' i problemi appartenenti al moto de' proietti, e sciorli in tutt' i casi possibili con somma facilità , e senza bisogno di calcolo alcuno. Perciò sia il seguente

PRO-

PROBL. XV.

249. *Costruire il Compasso balistico.*

SOLUZIONE.

1. Si prenda una tavola quadrata LM, che abbia il lato TM di due in tre palmi, e su di essa si descriva il mezzo cerchio ABC di tale grandezza, che, divisa la sua periferia ne' suoi gradi, sieno tali gradi ben distinti. Fig.22.

2. Pel centro O si tiri sull' istessa Tavola la retta OD perpendicolare al diametro AC, e che sia distintissima.

3. Si affiggano sulla medesima Tavola due righe OP, OQ nel punto O in modo, che possano girare intorno all' istesso punto O, come se fossero le due gambe d' un compasso di proporzione, e che, qualora formano l'angolo retto, i lati interiori caschino sulle rette OA, OD.

4. Si affigga alla riga OQ l' altra RS in modo, che possa questa avere due moti, uno lungo la riga OQ, e l' altra intorno al punto R; però il punto R in ogni sito di RS si deve sempre trovare nel piano della superficie anteriore della riga OQ, e nel piano della superficie sinistra dell' istessa riga RS.

5. Le righe OQ, OP, RS si dividano di

di più tutte in particelle dell' istessa grandezza, e ne contenghino di sì fatte parti la riga OQ tante, che possa con esse contrassegnare le lunghezze di tutt' i tiri, che si possono fare co' mortari, la righa OP tante, che si possa con esse contrassegnare tutte le linee delle velocità, e la riga RS poco meno della riga OQ.

6. Finalmente la Tavola LM istessa si divida anche in piccioli quadrati uguali con rette, altre parallele a OD, e altre perpendicolari nella parte, che apparisce divisa, e in quadrati, che abbiano i lati della lunghezza delle parti, nelle quali sono state divise le righe.

S' avrà in tal modo il compasso balistico cercato.

PROBL. XVI.

250. *Sciorre tutt' i problemi appartenenti al moto de' proietti in tutt' i casi coll' ajuto del compasso balistico.*

SOLUZIONE.

CASO I.

Sia la linea del tiro orizzontale, si cerca la linea della velocità, dato l' angolo della proiezione, e data l' ampiezza della parabola.

1. Si

1. Si dispongano nel compasso balistico le righe OQ, OP in modo, che l' angolo AOQ sia retto, e l'angolo AOP sia il doppio di quello della proiezione. Fig. 23.

2. Si numerino nella riga OQ da O in R tante delle sue parti, quante ne disegna il numero delle canne della metà dell' ampiezza data; e nel punto R s'adatti la riga RS verticalmente a OQ. Intersecherà RS la riga OP in F.

Il numero delle parti, che si troveranno segnate in OF, darà il numero delle canne della linea cercata della velocità.

CASO II.

Sia pure la linea del tiro orizzontale, si cerca l' ampiezza della parabola, data la linea della velocità, e dato l' angolo della proiezione.

1. Si dispongano nel compasso balistico le due righe OQ, OP in modo, che l'angolo AOQ sia retto, e che l' angolo AOP sia il doppio di quello della proiezione.

2. Si numerino nella riga OP tante delle sue parti da O in F, quante ne disegna il numero delle canne della linea della velocità; e per F si faccia passare la riga RS, mettendola perpendicolare a OQ.

Sarà l' ampiezza cercata di tante canne, quante ne disegnerà il doppio del numero

delle parti, che si troveranno notate in OR.

CASO III.

Sia anche la linea del tiro orizzontale, si cerca l' angolo della proiezione, data la linea della velocità, e data l' ampiezza della parabola.

1. Si disponga nel compasso balistico la riga OQ in modo, che l' angolo AOQ sia retto; e si prendano OR di tante parti, quante ne disegna la metà del numero delle canne dell' ampiezza, e OF di tante parti, quante ne disegna il numero delle canne della linea della velocità.

2. Per R si faccia passare RS, mettendola perpendicolare a OQ, e OP si vada girando, finchè col punto F s' intersechi con RS.

Sarà la metà dell' angolo AOP l' angolo cercato della proiezione.

CASO IV.

Sia la linea del tiro, inclinata all' orizzontale con qualunque angolo, si cerca la linea della velocità, data la lunghezza del tiro, e dato l' angolo della proiezione.

Fig. 24. e 25. 1. Si dispongano nel compasso balistico le righe OQ, OP in modo, che l' angolo DOQ,

DOQ, sia uguale all'inclinazione della linea del tiro coll' orizzontale,, e che l'angolo AOP sia il doppio di quello della proiezione.

2. Si prenda OR, che contenghi tante delle parti di OQ, quante ne disegnano le canne della linea del tiro, e per R si faccia passare RS.

3. Si vada poi girando RS interno al punto R, finchè si trova, che la somma, o la differenza delle parti, contenute in RF, RK, uguagli il numero di quelle, che si contengono in OF.

Darà il numero delle parti di OF il numero delle canne della linea della velocità.

CASO V.

Sia la linea del tiro anche inclinata all' orizzontale con qualunque angolo, si cerca la lunghezza del tiro, data la linea della velocità, e dato l'angolo della proiezione.

1. Si dispongano OQ, OP, come nel caso precedente; e si prenda OF, che contenghi tante delle parti di OP, quante ne disegnano le canne della linea della velocità.

2. Si faccia passare RS pel punto F, e si vada movendo la riga RS portandola coll' estremo R più a destra, o a sinistra, finchè la somma, o la differenza delle parti contenute in RF, RK uguagli il numero delle parti di OF.

 Da-

Darà il numero delle parti di OR il numero delle canne della lunghezza del tiro.

CASO VI.

Sia finalmente la linea del tiro pure inclinata all' orizzontale con qualunque angolo, si cerca l' angolo della projezione, data la linea della velocità, e data la lunghezza del tiro.

1. Si disponga la riga OQ in modo, che l' angolo DOQ sia uguale all' inclinazione della linea del tiro colla orizzontale; e si prendano OR di tante delle dette parti, quante ne dinota il numero delle canne della lunghezza del tiro, e OF di tante delle medesime parti, quante ne disegna il numero delle canne della linea della velocità.

2. Si faccia passare RS pel punto R, e si girino le due righe OP, RS intorno agli punti O, e R, finchè s' interfechino in F, e sia la somma, o la differenza delle parti contenute in RF, RK uguale al numero di quelle, che si contengono in OF.

Darà la metà dell' angolo AOP l' angolo cercato della proiezione.

AVVERTIMENTO I.

251. Si noti che se nel caso della *figura* 23 a FR s' aggiugne FM = $\frac{1}{2}$ (FO — RF

— RF), faranno M il vertice dell'affe della parabola, e MR l'altezza maffima dell' iftefla parabola. E fe nel cafo delle figure 24, e 25 a FL s' aggiugne FM = $\frac{1}{2}$ (FO — LF), farà M pure il vertice dell'affe della parabola, e MI darà la verticale, che tramezza tra 'l vertice dell'affe della parabola, e la linea del tiro.

AVVERTIMENTO II.

252. Si noti di più che fe, determinata la linea della velocità OF, fi prende nel cafo della *figura* 23 OI = 2OF, farà OI l' ampiezza maffima della parabola. E fe, determinata l' iftefla linea della velocità OF, fi prende nel cafo delle *figure* 24, e 25 OE = OF, e fi cerchi il punto G tale, che fia la fomma, o la differenza di EG, GH uguale ad OE; farà OG la lunghezza del tiro maffimo.

AVVERTIMENTO III.

253. Si noti finalmente che la teorica già efpofta del moto de' proietti non fi può nella pratica efattamente verificare. I. La refiftenza dell' aria altera non poco i moti de' proietti; e una sì fatta alterazione neppure è coftante, perchè non è coftante nè lo ftato dell' aria, nè la fua denfità. II. Gli tre ingredienti della polvere difficilmen-

te si trovano ugualmente distribuiti in tutt'i granelli della medesima, e difficilmente per conseguenza si trovano tutt'i granelli dell' istessa efficacia. Dal che deriva spesso che con cariche uguali non s'abbia l'istessa forza proiettile. III. I proietti, che si prendono per uguali, hanno per l'ordinario qualche disuguaglianza o nel peso, o nella figura, o nella grandezza, o nella distribuzione del peso per le loro parti. IV. Finalmente la situazione istessa del proietto nell'arma, che s'adopra, produce spesso che la direzione, che riceve dalla forza proiettile, non sia esattamente quella, che si vuole. Queste quattro riferite cagioni sono sufficientissime ad alterare i moti de' proietti, e ad impedire, che vi possa essere un'esatta corrispondenza tra la teorica, e la pratica.

CAP.

CAP. IX.

Della velocità, colla quale i proietti percuotono i piani, che incontrano.

TEOR. XV.

254. *Sieno AMN la parabola, che descrive un proietto, RS il piano, che percuote in N, e NT la tangente della parabola nel punto N. Dico che la velocità, colla quale il proietto giugne in N, sta a quella, colla quale percuote il piano RS, come il seno massimo al seno dell' angolo TNS.* Fig. 26.

DIMOSTRAZIONE.

Potendosi senza errore sensibile considerare la tangente TN, come l' elemento N della parabola prolungato, si potrà senza sensibile errore considerare anche muoversi il proietto in N colla velocità, colla quale vi giugne per la direzione TN. Sicchè, se con BN, presa di qualunque lunghezza, s' esprime la velocità, colla quale il proietto giugne nel punto N della parabola, e da B si cala su RS la perpendicolare BC; esprimerà BC la velo-

cità, colla quale il medesimo proietto percuoterà RS. E perciò le velocità, colla quale il proietto giugne in N, sta a quella, colla quale percuote il piano RS, come BN: BC, o come il seno massimo al seno dell'angolo BNS. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

255. Se l'angolo BNS è retto, BC combacia con BN, e conseguentemente il proietto percuote RS colla intera velocità, colla quale giugne in N. Se poi l'angolo BNS è acuto, o ottuso, il proietto allora percuote RS con velocità minore di quella, colla quale giugne in N, e tanto più sì fatta velocità sarà minore, quanto più l'angolo BNS s'allontanerà dal retto.

COROLLARIO II.

256. Coincida RS coll'orizzontale NP; e sieno PM l'asse della parabola, F il fuoco, e NQ perpendicolare a TN; e s'intendano prolungata PM in T, e Q, e congiunta la retta FN. Sarà il quadrato della velocità, colla quale il proietto giugne in N, al quadrato di quella, con cui percuote PN, come il quadrato del seno massimo al quadrato del seno dell'angolo TNP, e perciò come $TN^2 : TP^2$, o come QT: TP,

(5

(§ 269 *del tom.* 2), ovvero come QF : PM, (§ 20 *del tom.* 6), o pure come NF : MP (§ 23 *del tom.* 6). Sicchè, essendo la velocità, colla quale il proietto giugne in N, uguale a quella, che acquisterebbe liberamente scendendo per FN (§ 196); sarà la velocità, con cui percuote il piano orizzontale PN, uguale a quella, che acquisterebbe liberamente scendendo per MP.

COROLLARIO III.

257. Quindi quanto più il punto N è distante da M, tanto più la velocità, colla quale il proietto percuote RS, qualora TN è perpendicolare a RS, diventa maggiore, la quale velocità s' accresce a proporzione della radice di FN; e tanto più anche la velocità, con cui il proietto percuote l' orizzontale PN, diviene maggiore, la quale velocità s' accresce a proporzione della radice dell' ascissa MP, e conseguentemente a proporzione, che cresce l' ordinata PN.

COROLLARIO IV.

258. Sieno AMN, AON le due parabole dell' istessa lunghezza di tiro, che si possono descrivere dal medesimo proietto, spinto colla medesima forza proiettile, e con angoli di proiezioni, che hanno con quello del Fig. 27.

del tiro massimo uguali differenze ; e sieno MP , OQ i loro assi , e NP orizzontale . Sarà la velocità, colla quale il proietto percuoterà PN, spinto per la parabola AMN, a quella, con cui percuoterà l'istesso orizzontale PN, spinto per la parabola AON, come la radice di MP alla radice di OQ. Sicchè il piano orizzontale PN viene percosso con maggiore velocità, qualora il proietto è spinto per la parabola di maggiore altezza, che qualora viene spinto per la parabola d'altezza minore.

COROLLARIO V.

259. Se il piano da percuotere RS è inclinato all'orizzontale; allora, posto che TN, VN sieno le tangenti in N delle due parabole, se l'angolo TNS è retto, la velocità, colla quale il proietto, spinto per la parabola AMN, percuote RS, è maggiore di quella, con cui può percuoterlo, spinto per la parabola AON; e l'una velocità è all' altra, come il seno massimo al seno dell'angolo VNS. Se poi è retto l'angolo VNS, la velocità, colla quale il proietto, spinto per la parabola AON, percuote RS, è maggiore di quella, con cui può percuoterlo, spinto per la parabola AMN; e l'una velocità è all'altra nella ragione del seno massimo al seno dell'angolo TNS. Se finalmente non è retto nè l'angolo TNS, nè l'ango-

golo VNS, in tale caso la velocità, colla quale il proietto, spinto per la parabola AMN, percuote RS, è maggiore, o minore di quella, con cui può percuoterlo, spinto per la parabola AON, secondochè il seno dell' angolo TNS è maggiore, o minore del seno dell' angolo VNS.

COROLLARIO VI.

260. Sia finalmente ABC la parabola, Fig. 28. che descrive un proietto, spinto dalla forza proiettile per la direzione orizzontale AE; e sieno CE, BD due piani verticali, e CG, BF le tangenti della parabola in C, e B. Contrassegnando le velocità, colle quali il proietto giugne in C, e B, con V, e v, quelle, colle quali deve percuotere i piani CE, BD, con P, e p, e 'l seno massimo con R; s' avranno le seguenti proporzioni

$$R : sen.\ GCE = V : P$$
$$R : sen.\ FBD = v : p.$$

Onde

$$P : p = V \times sen.\ GCE : v \times sen.\ FBD.$$

Sicchè le velocità, colle quali il proietto può percuotere i piani CE, BD, sono in ragione composta dalla ragione delle velocità, colle quali giugne in C, e B, e dalla ragio-

gione de' seni degli angoli GCE, FBD.

PROBL. XVII.

Fig.29. 261. *Sia AMN la parabola, che descrive un proietto, il quale percuote il piano RS in N, e sieno già note la linea AB della velocità, la lunghezza AN del tiro, l'angolo BAL della proiezione, l'angolo SNX d'inclinazione del piano SN coll'orizzontale NX, e l'angolo NAV d'inclinazione della linea AN coll'orizzontale AV. Determinare la ragione della velocità, colla quale viene il proietto spinto in A dalla forza proiettile, alla velocità, colla quale percuote in N il piano RS.*

SOLUZIONE.

S'intendano essere BE la direttrice della parabola AMN, MQ l'asse, F il fuoco; e NP ordinata all'asse. S'intendano inoltre per N tirate EV perpendicolare alla direttrice BE, e TN tangente della parabola, che s'unisca coll'asse prolungato in T. Finalmente s'intendano e congiunta AF, che sarà uguale ad AB, e per A tirata l'orizzontale AV.

1. Nel triangolo rettangolo AVN, essendo noti l'angolo NAV, e 'l lato AN, si determinino i lati AV, VN.

2. Nel triangolo AQF, essendo noti l'angolo FAQ, supplimento al retto di BAF, ch'

ch'è il doppio di BAL, e 'l lato AF, si determinino AQ, QF. Si faranno note QV, o sia PN, e FG, e conseguentemente FM; onde nota si farà anche MQ, e perciò pure MP, e conseguentemente PT.

3. Nel triangolo rettangolo TPN, essendo noti i lati TP, PN, si determini l'angolo TNP. Si farà noto l'angolo TNS, sottraendo da due retti la somma degli due TNP, SNX.

4. Finalmente, essendo nota NE = PG = PM + MF, si trovi la ragione composta dalla ragione delle radici di AB, NE, e dalla ragione del seno massimo al seno dell'angolo TNS.

Darà sì fatta ragione composta la ragione cercata della velocità, colla quale è il proietto spinto in A dalla forza proiettile, alla velocità, colla quale percuote in N il piano RS. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

AVVERTIMENTO I.

262. Si noti che se CMN contrassegna la parabola, che descrive un proietto per percuotere il piano RS in N, qualora la linea del tiro è l'orizzontale CX; le tangenti CT, NT ne' punti C, e N della detta parabola s'uniscono col suo asse PM prolungato nel medesimo punto T, e formano con CN gli angoli TCN, TNC tra lo-

loro uguali. Onde se, calata da C sulla direttrice DE la perpendicolare CD, è l' angolo DCT = SNX, la somma degli angoli TNC, SNX è uguale al retto DCN, e conseguentemente l' angolo TNS è anche retto. E perciò, data la linea della velocità, e dato l'angolo SNX, si può determinare la distanza, che deve avere nell' orizzontale XC il punto della proiezione dal punto N, acciò il proietto coll' angolo della proiezione DCT = SNX possa percuotere in N coll' intera velocità, colla quale vi giugne; riducendosi sì fatto problema a quello, in cui s'è insegnato il modo di determinare l' ampiezza della parabola, data la linea della velocità, e dato l'angolo della proiezione. Data poi la distanza CN, e dato l'angolo SNX, si può determinare la linea della velocità CD tale, che, spinto in C il proietto colla velocità, che acquisterebbe per DC, e coll'angolo della proiezione DCT = SNX, possa percuotere in N coll'intera velocità, colla quale vi perviene; riducendosi quest' altro problema a quello, in cui s'è insegnato il modo di determinare la linea della velocità, dato l'angolo della proiezione, e data l' ampiezza della parabola.

AV-

AVVERTIMENTO II.

263. Si noti di piu che, se il punto N si trova nell' orizzontale XC, e'l punto della proiezione deve essere in un' altra orizzontale AV; volendo con un mortaro spingere una bomba in modo, che vada a percuotere in N colla velocità, colla quale vi perverrà, si puo procedere a questo modo. I. Colla linea della velocità CD, determinata relativamente a una carica del detto mortaro, e coll' angolo della proiezione DCT = SNX, si determini l'ampiezza CN, che dovrebbe avere la parabola CMN da descriversi dalla bomba, per percuotere in N colla velocità, colla quale vi perverebbe, e si determinino l'altezza massima PM, e la distanza FM del suo fuoco F dal vertice M. II. Supposta continuata l'istessa parabola, finchè incontri AV in A, e supposto essere AL la tangente in A, e AB perpendicolare alla direttrice, si determini PQ = NV, cioè si determini la distanza delle due orizzontali CX, AV. Saranno note AB = QG, e MQ. III. Si trovi in ordine a MP, MQ, e al quadrato di PC il quarto proporzionale, s' avrà il quadrato di AQ; onde la sua radice darà AQ, e conseguentemente si farà nota AV. IV. Nel triangolo rettangolo AQL, essendo noti il lato AQ, e 'l lato QL = 2QM, si determi-

mini l'angolo QAL; si farà noto l' angolo BAL. Fatte tutte le dette determinazioni, se si prenderà A per punto della proiezione, e con una carica conveniente a dare al proietto la velocità, che acquisterebbe liberamente scendendo per AB, e coll'angolo della proiezione BAL si farà il tiro, la bomba percuoterà RS in N coll'intera velocità, colla quale vi perverrà.

Fine del Libro primo.

LIBRO II.

Della Statica.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

DEFINIZIONE I.

264. Si chiama *Macchina* ogni ſtrumento, con cui ſi può innalzare, traſportare, premere, o rompere qualunque corpo con riſparmio o di forza, o di tempo.

AVVERTIMENTO.

265. Coloro, che ſi sforzano di coſtruire delle macchine, per riſparmiare e forza, e tempo inſieme, conſumano in vano danaro, e tempo, e ſi dimoſtrano ignari delle leggi del moto. Sono le macchine di ſomma utilità nella vita civile, non perchè con eſſe ſi poſſono ottenere inſieme i due detti riſparmj, ma perchè col loro ajuto ſi poſſono adoperare quaſi tutte le forze, che

troviamo nella natura. L'eccellenza d'un macchinista in inventare qualche macchina consiste a sapervi in essa bilanciare secondo il bisogno il conveniente risparmio di forza col conveniente consumo di tempo, o'l conveniente risparmio di tempo col conveniente consumo di forza, e in sapervi applicare la forza col massimo vantaggio possibile. È perciò, per inventare una macchina conveniente al bisogno, vi vuole un genio meccanico, per perfezionarla vi vogliono la Geometria, e'l calcolo.

DEFINIZIONE II.

266. Si dicono in ogni macchina *Potenza* la forza applicatavi per muoverla, o che ne segua moto, o che no, e *Resistenza* la forza applicatavi, che colla sua azione si oppone a quella della potenza.

AVVERTIMENTO I.

267. Le potenze, che s'adoprano nelle macchine sono rare volte pesi, e frequentemente sono le forze dell'acqua, dell'aria, degli uomini, de'cavalli, de'bovi, ec.. Qualche volta serve di potenza in qualche macchina anche la forza del fuoco.

AVVERTIMENTO II.

268. Ancorchè sì le potenze, che le resistenze sieno di diverse spezie: nondimeno, per metterle a calcolo, si considerano tutte come determinati pesi. Così se in una macchina la forza d'un uomo fa l'istessa azione, che vi farebbe un peso di 25 libbre, si dirà fare un uomo in tale macchina la forza di lib. 25, e si metterà tale forza a calcolo come un peso di lib. 25. Similmente, se una resistenza, qualunque ella sia, che si deve superare da una potenza coll'ajuto d'una macchina, s'oppone all'azione della potenza, come s'opporrebbe un peso di 1000. lib., che si dovesse innalzare, si dirà allora essere tale resistenza di 1000 lib., e come un peso di 1000 lib. si metterà pure a calcolo.

DEFINIZIONE III.

269. Si dice in una macchina *Centro di moto* quel punto, intorno a cui ella si muove, quando è in moto.

DEFINIZIONE IV.

270. Chiamiamo per rispetto di qualunque macchina *Momenti* della potenza, e della resistenza non le azioni, che esse fanno sulla macchina, ma le azioni, che fanno l'

una sull' altra coll' ajuto della macchina in ogni istante di tempo.

AVVERTIMENTO I.

Fig. 30. 271. Rappresentino in qualunque macchina O il centro del moto, e AB la retta, agli cui estremi sono applicati i pesi A, e B, il primo de' quali si consideri essere la potenza, e 'l secondo la resistenza. Farà in ogni istante di tempo la gravità la sua azione in A, e conseguentemente sulla macchina; e sia per AC il moto nato in A in un istante per tale azione. Con sì fatto moto, e coll'ajuto della macchina farà A la sua azione su B, e per l' istesso moto trasferirebbe B per BF, se in B non vi fosse forza, che facesse azione contraria. Similmente in ogni istante di tempo la gravità farà la sua azione su B, e conseguentemente sulla macchina; e sia per BD il moto nato in B in un istante per tale azione. Con sì fatto moto, e coll' ajuto della macchina farà B la sua azione in un istante su A, e per l' istesso moto trasferirebbe A per AE, se in A non vi fosse forza, che facesse azione contraria.

COROLLARIO I.

272. Dunque il momento di A sta al momento di B, come il moto di A per AC

AC al moto di B per BD, e perciò in ragione composta dalla ragione de' pesi A, e B, e dalla ragione degli spazj AC, BD, che correrebbero nel medesimo istante di tempo.

COROLLARIO II.

273. Sieno i momenti di A, e B uguali. Sarà il moto di B per BD, comunicatoli dall' azione della gravità, uguale al moto dell' istesso B per BF, comunicatoli dall' azione di A coll' ajuto della macchina. E perciò sarà il moto di A per AC uguale al moto di B per BF; onde sarà A : B = BF : AC (§ 53) = BO : OA (§ 340 *del tom.* 2). Sicchè, se i momenti della potenza, e della resistenza sono in una macchina uguali, sono allora la potenza, e la resistenza in ragione reciproca delle distanze, che hanno dal centro del moto.

COROLLARIO III.

274. Sia in oltre A : B = BO : OA. Se si niega essere in tale caso uguali i momenti di A e B; vi sarà un altro peso, diverso da A, ch' io chiamo Q, il cui momento in A uguaglierà il momento di B; e sarà conseguentemente Q : B = BO : OA. Ma per l' ipotesi A : B = BO : OA. Dunque Q : B = A : B. Sicchè grandezze di-

fuguali Q, e A hanno uguali ragioni alla terza B. Ora ciò è impossibile. Dunque è impossibile che il momento di A non uguagli il momento di B. Per la qual cosa in qualunque macchina la potenza, e la resistenza, qualora hanno momenti uguali, sono tra loro in ragione reciproca delle distanze, che hanno dal centro del moto, e qualora sono in ragione reciproca delle distanze, che hanno dal centro del moto, hanno momenti uguali.

COROLLARIO IV.

275. Quindi secondochè sarà AO maggiore, uguale, o minore di BO, così a proporzione sarà A minore, uguale, o maggiore di B, qualora i momenti loro sono uguali.

COROLLARIO V.

276. In oltre, quando i momenti di A e B sono uguali, sta $A : B = BO : OA$, e conseguentemente è $A \times AO = B \times BO$. Dunque, qu ndo A e B hanno momenti uguali, sono tali momenti nella ragione de' prodotti $A \times AO$, $B \times BO$.

COROLLARIO VI.

277. Di più coll'accrescere, o diminuire

re il peso B, senz' accrescerne la distanza da O, si deve accrescere, o diminuire a proporzione il moto, che la gravità li comunica in ogni istante di tempo. Dunque il momento di B, qualora non si muta la distanza OB, s'accresce, o diminuisce a proporzione che s'accresce, o diminuisce il peso B. L'istesso si deve intendere per rispetto di A.

COROLLARIO VII.

278. Qualora i momenti di A e B sono uguali, sta A: B = BO: OA (§ 273). Dunque se s'accresce, o diminuisce il peso B, senza cambiarne la distanza da O, per conservare l' uguaglianza de' momenti, si deve a proporzione accrescere, o diminuire il peso A, o pure accrescere, o diminuire la distanza AO. Sicchè il momento della potenza A non solamente si può accrescere, o diminuire coll' accrescere, o diminuire a proporzione il suo peso, senza mutare la sua distanza da O, ma ben anche con accrescere, o diminuire a proporzione la sua distanza da O, senza alterarne il suo peso.

COROLLARIO VIII.

279. Avendo dunque due potenze applicate ad AO momenti proporzionali alle distanze, che hanno da O, se le potenze sono

uguali, e le diſtanze diſuguali, e momenti proporzionali alle potenze, ſe le diſtanze da O ſono uguali, e diſuguali le potenze: ne ſegue che ſe due potenze A, e P, applicate ad AO, ſono diſuguali, e hanno diſtanze diſuguali da O, i momenti di tali potenze ſono tra loro in ragione compoſta dalla ragione delle potenze, e dalla ragione delle loro diſtanze da O, e perciò ſono nella ragione de' prodotti A×AO, P×PO. L'iſteſſo ſi deve intendere per riſpetto delle diverſe reſiſtenze applicate a diverſi punti di BO.

COROLLARIO IX.

280. Sieno di vantaggio A una potenza qualunque, e Q una qualſiſia reſiſtenza. S'intenda eſſere B un'altra reſiſtenza, che abbia il ſuo momento uguale a quello di A. Saranno i tre momenti di A, B, C in ragione ordinata de' tre prodotti A×AO, B×BO, Q×QO. Dunque il momento della potenza A ſta al momento della reſiſtenza Q, come A×AO : Q×QO. E perciò non ſolamente le diverſe potenze applicate a diverſi punti di AO, o le diverſe reſiſtenze applicate a diverſi punti di BO hanno momenti, che ſono come i prodotti, che naſcono moltiplicando le iſteſſe potenze, o le iſteſſe reſiſtenze per le diſtanze, che hanno da O, ma anche una potenza qualun-

lunque applicata ad AO, e una qualsisia resistenza, applicata a BO, hanno momenti, che sono come i prodotti, che nascono moltiplicando la potenza, e la resistenza per le rispettive distanze da O.

COROLLARIO X.

281. Essendo finalmente il momento di A al momento di P, come $A \times AO : P \times PO$; sarà il momento di A uguale, o maggiore del momento di P, secondochè sarà $A \times AO$ uguale, o maggiore di $P \times PO$, e conseguentemente secondochè sarà la ragione di $A : P$ uguale, o maggiore di quella di $PO : AO$. Similmente, essendo il momento di A al momento di Q, come $A \times AO : Q \times QO$, sarà il momento di A uguale, o maggiore di quello di Q, secondochè sarà $A \times AO$ uguale, o maggiore di $Q \times QO$, e conseguentemente secondochè sarà la ragione di $A : Q$ uguale, o maggiore di quella di $QO : AO$.

AVVERTIMENTO II.

282. Ciò, che s' è detto fin qui delle potenze, e delle resistenze considerate come pesi, si applica a tutte le altre potenze, e resistenze; purchè si estimino quant' i pesi, che farebbero le medesime azioni.

DEFINIZIONE V.

283. Si dicono in qualunque macchina la potenza, e la resistenza essere *in equilibrio*, se hanno relativamente al centro del moto momenti uguali.

COROLLARIO I.

284. Dunque in ogni macchina la potenza, e la resistenza sono in equilibrio, quando sono tra loro in ragione reciproca delle distanze, che hanno dal centro del moto, e conseguentemente quando i prodotti, che nascono, moltiplicandole per le rispettive distanze, che hanno dal centro del moto, sono uguali.

COROLLARIO II.

285. In oltre ogni macchina nello stato d' equilibrio tra la potenza, e la resistenza è inquiete; perchè con quanto movimento si sforza di girarla la potenza per una direzione, con altrettanto per direzione contraria si sforza di girarla la resistenza. Onde si muove una macchina, quando tra la potenza, e la resistenza non v' è equilibrio, cioè quando il momento della potenza eccede quello della resistenza.

AVVERTIMENTO I.

286. Si noti che quando una macchina si muove, perchè il momento della potenza eccede quello della resistenza, i moti della potenza, e della resistenza sono ordinariamente equabili.

COROLLARIO III.

287. Quindi in una macchina posta in moto la potenza, e la resistenza hanno velocità proporzionali agli spazj, che corrono nel medesimo tempo, e conseguentemente proporzionali alle distanze dal centro del moto; e perciò hanno moti proporzionali agli prodotti, che nascono moltiplicandole per gli rispettivi spazj, che corrono nell' istesso tempo, o per le rispettive distanze dal centro di moto, e conseguentemente proporzionali ai loro momenti.

COROLLARIO IV.

288. Per la qual cosa, essendo, quando la macchina è in moto, il momento della potenza maggiore di quel'o della resistenza, sarà il prodotto della potenza moltiplicata per lo spazio, che ella corre in un dato tempo, maggiore del prodotto della resistenza moltiplicata per lo spazio, che ella corre

re nel medesimo tempo.

AVVERTIMENTO II.

289. Da più esperienze s'è rilevato che un uomo d'una forza ordinaria, che fa colla sua forza, e non col suo peso azione su d'una macchina, non può fare in tre ore di travaglio, se non lo sforzo continuo d'un peso di circa 14 rotola; e che un buon cavallo non può fare per l'istesso tempo più di quello farebbero sette uomini, o più del peso di rotola 98. Da più esperienze s'è rilevato ancora che nel detto travaglio tanto un uomo co' mani, o co' piedi, quanto un cavallo co' piedi non può correre, se non circa miglia $2\frac{1}{1}$. per ora. Sicchè lo spazio di miglia $2\frac{1}{10}$, o sia di palmi 14752 (§ 5 *del tom.* 7) si può stabilire pel massimo spazio possibile da corrersi in un'ora da un uomo, o da un cavallo, qualora o l'uno, o l'altro colla sua azione continua muove una macchina.

COROLLARIO V.

290. Quindi, se si deve coll'ajuto d'una macchina muovere in un quarto d'ora una resistenza equivalente al peso di 300 cantaja per 100 palmi, e si vuole sapere quanti uomini, o quanti cavalli a un di presso vi si debbono impiegare, si deve procedere a que-

a questo modo. La resistenza è di cantaja 300, o di rotola 30000, e lo spazio, che deve correre, è di pal. 100. Dunque il moto della resistenza l' esprime il prodotto 30000 × 100, cioè 3000000. In oltre è noto che la potenza in $\frac{1}{4}$ d' ora non può correre, se non 3688 pal. Dunque il moto della potenza l' esprime l' istessa potenza moltiplicata per gli palmi 3688. Or il moto della potenza deve essere maggiore di quello della resistenza, acciò la macchina si possa muovere (§287). Sicchè la potenza sarà maggiore del peso, ch' esprime il quoziente, che si ha dividendo 3000000 per 3688, cioè maggiore delle rotola 813. Ma il peso di 813 rotola equivale alla forza di circa uomini 59, o cavalli 8. Sicchè, per muovere la macchina nel supposto caso, vi si debbono impiegare più di 59 uomini, o più di 8 cavalli.

COROLLARIO VI.

291. Se poi si vuole sapere per quanto spazio a un di presso 21 uomini, o 3 cavalli possono con una macchina muovere un peso di 300 cantaja in un quarto d'ora; si deve allora fare il seguente calcolo. Si moltiplichi la potenza, ch' è di rotola 21 × 14 = 294, per 3688, spazio, che può la potenza correre in un quarto d' ora, e 'l prodotto 1084272 si divida per la resisten-

za,

za, o sia per rotola 30000 ; il quoziente, ch'è circa pal. 36, dà a un di presso lo spazio cercato.

COROLLARIO VII.

292. Se di più si vuole sapere in quanto tempo a un di presso 21 uomini, o 3 cavalli possono muovere per 100 palmi un peso di 300 cantaja; si deve in tale caso procedere a questo modo. Si moltiplichi prima la resistenza di 30000 rotola per gli pal. 100. Poscia il prodotto 3000000 si divida per la potenza, ch'è di rotola 294. Il quoziente dà pal. 10204. Or la potenza non può correre sì fatto spazio in meno di 41'. Dunque il tempo cercato è più di 41'.

COROLLARIO VIII.

293. Se finalmente si vuole sapere a un di presso che peso uomini 21, o cavalli 3 possono in 3 minuti muovere per 100 palmi, si deve procedere a questo modo. Si moltiplichi la potenza, ch'è di 294 rotola per pal. 737, spazio, che ella può correre in 3 minuti, e'l prodotto 216678 si divida per 100. Il quoziente 2166 dinota che la resistenza deve essere meno di rotola 2166, e conseguentemente di circa 21 cantaja.

DE-

DEFINIZIONE VI.

294. Si dice *Centro di gravità* d'un corpo quel punto, da cui, liberamente sospeso, o sostenuto il corpo, resta egli, in qualunque situazione sia, sempre immobile.

COROLLARIO.

295. Dunque la forza, che sostiene un corpo pel suo centro di gravità, sostiene lo sforzo dell' intera sua gravità. E perciò ogni corpo fa azione colla sua gravità, come se ella fosse tutta raccòlta nel centro di gravità. Quindi è che in meccanica si considera ogni corpo come un punto grave, e come un pùnto provveduto dell' intera sua gravità.

DEFINIZIONE VII.

296. Si dicono per rispetto di qualunque corpo *Diametro della gravità*, e *Piano della gravità* ogni retta, e ogni piano, che passano pel suo centro di gravità.

COROLLARIO I.

297. Dunque la comune sezione di due piani di gravità in un corpo dà un diametro di gravità, e la comune sezione di due dia-

diametri di gravità dà il centro di gravità.

COROLLARIO II.

298. Restando immobile ogni corpo, in qualunque situazione egli sia, sostenuto libero dal centro di gravità (§ 294): è facile ad intendere che ogni piano di gravità divide in modo un corpo, che la somma de' momenti delle parti della materia, che sono di qua d'uno di tali piani, uguaglia la somma de' momenti delle parti di materia, che sono al di là dell' istesso piano. Poichè, potendo nelle infinite diverse situazioni, che può ricevere il corpo, ognuno de' detti piani divenire verticale, se le somme de' detti momenti non fossero uguali relativamente a qualunque de' detti piani, non resterebbe il corpo immobile in qualunque situazione, sostenuto dal centro di gravità.

AVVERTIMENTO I.

Fig.31. 299. Si noti che in un corpo non vi può essere, se non un centro solo di gravità. Imperciocchè se nel corpo AB ve ne fossero due O, e P: supposto essere LM, QR due piani paralleli, che passono per O, e P; sarebbero relativamente al piano LM uguali le somme de' momenti delle parti componenti LBM, LAM, e relativamente al piano

piano QR uguali le somme de' momenti delle parti componenti QBR, QAR. Ma la somma de' momenti delle parti di QBR relativamente al piano QR è maggiore della somma de' momenti delle parti di LBM relativamente al piano LM. Dunque anche la somma de' momenti delle parti di QAR relativamente al piano QR è maggiore della somma de' momenti delle parti di LAM relativamente al piano LM. Or ciò è impossibile. Dunque è impossibile ancora che un corpo abbia più d'un centro di gravità.

AVVERTIMENTO II.

300. Si noti pure che vi sono de' corpi, i quali per ragione delle loro figure hanno un punto dentro di essi, detto *centro della grandezza*, che ogni piano, che vi passa, li divide in due porzioni uguali in grandezze; e sono quelli, i quali per tutte le possibili direzioni possono essere divisi da infiniti piani in porzioni non solamente tutte uguali di grandezza, ma anche in porzioni, delle quali ognuna è perfettamente simile alla sua opposta. Di tale sorta sono i corpi di figura sferica, cilindrica, parallelepipeda, ec.. Ve ne sono poi degli altri, che non hanno centro alcuno di grandezza; per-

chè per quel punto istesso, per cui possono passarvi in essi più piani, che li dividono in due porzioni uguali, possono passarvi anche degli altri, che li dividono in porzioni disuguali. Di tale sorta sono i prismi triangolari, le piramidi, i coni, ec.. Or se un corpo della prima spezie è omogeneo, il centro di gravità non differisce dal centro della grandezza; perchè ogni piano, che passa pel centro della grandezza, divide il corpo in due porzioni uguali di grandezza, e perfettamente simili, e conseguentemente in porzioni tali, che la somma de' momenti delle parti di materia componenti l'una uguaglia la somma de' momenti della parti di materia componenti l'altra. Se poi un corpo omogeneo è della seconda spezie; de' piani, che passano pel centro di gravità, alcuni il dividono in porzioni d'uguali grandezze, e altri no; ed è, supposto nel corpo omogeneo AB essere O il centro di gravità, ed LM uno de' piani di gravità, la grandezza della parte LAM sempre minore della grandezza della parte LBM, e tanto più minore, quanto più la parte LAM è sottile, e lunga per rispetto della parte LBM.

AVVERTIMENTO III.

301. Si noti finalmente che, se un corpo è eterogeneo, avendo una sua porzione di

di materia più pesante dell'altra; sempre allora degl'infiniti piani di gravità alcuni dividono il corpo in porzioni d'uguali grandezze, e altri no; e perciò se il corpo ha il centro di grandezza, tale centro è diverso in sì fatto caso dal centro di gravità.

DEFINIZIONE VIII.

302. Si dice di qualunque corpo *Linea di direzione* la verticale, che passa pel suo centro di gravità.

COROLLARIO I.

303. Quindi ogni diametro di gravità può in un corpo essere linea di direzione.

COROLLARIO II.

304. Facendo su d'un corpo la gravità diffusa nelle sue parti azione, come se tutta fosse raccolta nel centro di gravità: ne segue 1. che ogni corpo, lasciato libero in qualunque posizione, deve discendere per la linea di direzione, che li corrisponde nella posizione, in cui è lasciato; 2. che niun corpo per l'azione della gravità può muoversi, allontanandosi col centro di gravità dal centro della Terra; 3. che ogni corpo per l'azione della gravità si muove, se il centro di gravità si può avvicinare al centro

della Terra, e si muove sempre facendo sì, che l'avvicinamento del suo centro di gravità al centro della Terra sia il massimo avvicinamento possibile; 4. che ogni corpo, sostenuto da un punto diverso dal suo centro di gravità, resta immobile, se tale punto, e 'l centro di gravità sono in un'istessa verticale, altrimenti si gira, finchè acquista tale situazione; 5. finalmente che se un corpo è pendente con un filo da un altro corpo, fa egli azione su tale altro corpo, come se il suo centro di gravità fosse nel punto, da cui è sospeso.

AVVERTIMENTO I.

305. Si noti che se O è il centro di gravità del corpo AB, e LM è la linea di direzione, quando AB è colla sua lunghezza in sito orizzontale: mantenendo AB per qualunque punto di LM, resta egli colla sua lunghezza sempre in sito orizzontale. Però se il punto, per cui è mantenuto, è il centro istesso di gravità, dando ad AB qualunque inclinazione, resta sempre nel sito, in cui è posto; se poi è diverso, allora dando ad AB qualche inclinazione, si rimette da se nel sito di prima, se il detto punto è superiore al punto O, e se è inferiore, segue ad inclinarsi, finchè prenda una situazione opposta alla prima.

AV.

AVVERTIMENTO II.

306. Si noti di vantaggio che se AB è un corpo eterogeneo, e ha il volume della parte meno grave LAM, ch'è di qua dal centro di gravità O, considerabilmente maggiore del volume dell'altra parte più grave LBM; movendosi egli per l'aria secondo qualunque direzione, deve incontrare più resistenza colla parte LAM, che coll'altra LBM, e conseguentemente deve girarsi, nel caso che non lo fosse nel principio del moto, colla parte LBM avanti. E perciò se è spinto un sì fatto corpo verticalmente da giu in su, salirà colla parte LBM avanti, e nel ricadere si girerà per scendere con portare avanti l'stessa parte LBM.

DEFINIZIONE IX.

307. Si chiama *Centro di gravità comune* di più corpi, che hanno qualunque situazione tra loro, quel punto, ch'è tra essi tale, che se venisse per mezzo di rette inflessibili congiunto co' centri di gravità particolari de' medesimi corpi, è venisse sostenuto, si manterrebbero immobili tutt'i corpi, in qualunque situazione, che si mettesse il sistema degl' istessi corpi congiunti del modo già detto.

COROLLARIO I.

308. Essendo qualsisia corpo un sistema d' innumerabili parti di materia, che lo compongono; sarà il centro di gravità di qualsisia corpo il centro comune di gravità di tutte le sue parti componenti.

COROLLARIO II.

309. Restando immobile ogni sistema di corpi, in qualunque situazione egli sia, congiunti i corpi del modo già detto, e sostenuto il sistema dal centro comune di gravità: ne segue che ogni piano, che passa pel centro comune di gravità d' un sistema di corpi, deve dividere l' istesso sistema in modo, che la somma de' momenti de' corpi, che sono di qua d' uno di tali piani, deve uguagliare la somma de' momenti de' corpi, che sono al di là dell' istesso piano; e ciò per l' istessa ragione addotta al § 298 relativamente al centro di gravità particolare d' ogni corpo.

COROLLARIO III.

Fig. 32. 310. Sia un sistema composto da qualunque numero di corpi A, B, C, D, E, esistenti o in un istesso piano, o in piani diversi; e s' intenda essere O il centro di gra-

gravità comune di tale sistema. Sia in oltre ST un piano tirato ad arbitrio, e su tale piano sieno calate e dagli centri di gravità particolari de' detti corpi, e dal punto O le perpendicolari AF, BM, CR, DP, EI, OK. S'intenda di più passare per O il piano VX parallelo ad ST, che incontri AF, BM, CR in G, L, Q, e incontri anche le IE, e PD prolungate in H, ed N. Saranno GF, HI, OK, LM, NP, QR tutte uguali tra loro. Essendo relativamente al piano VX la somma de' momenti de' pesi A, B, C uguale alla somma de' momenti de' pesi D, ed E (§. *prec.*); sarà $A\times AG+B\times BL+C\times CQ=D\times DN+E\times EH$. Ma

$$A\times AG=A\times AF-A\times GF$$
$$B\times BL=B\times BM-B\times LM$$
$$C\times CQ=C\times CR-C\times QR$$
$$D\times DN=D\times NP-D\times DP$$
$$E\times EH=E\times HI-E\times EI.$$

Dunque

$$A\times AF-A\times GF+B\times BM-B\times LM+C\times CR-C\times QR=D\times NP-D\times DP+E\times HI-E\times EI.$$

E perciò

$$A\times AF+B\times BM+C\times CR+D\times DP+E\times EI=A\times GF+B\times LM+C\times QR+D\times NP+E\times HI=(A+B+C+D+E)\ OK.$$ Per la qual cosa la somma de' prodotti, che na-

scono moltiplicando ciascun peso per la distanza, che ha il suo centro di gravità da qualunque piano ST, è uguale al prodotto, che nasce moltiplicando la somma de' medesimi pesi per la distanza del loro comune centro di gravità dall' istesso piano ST.

AVVERTIMENTO.

311. Si noti che se il piano ST si fa passare pel centro di gravità del corpo E, allora il prodotto E×EI svanisce; e se si fa passare per gli centri di gravità di E, e D, in tale caso svaniscono ambi i prodotti E×EI, e D×DP. E perciò, quando il piano ST si fa passare per gli centri di gravità di D, ed E, la somma de' prodotti, che nascono moltiplicando i soli pesi A, B, C per le rispettive distanze de' loro centri di gravità da ST, uguaglia il prodotto, che si ha moltiplicando la somma di tutt' i pesi A, B, C, D, E per la distanza del punto O dall' istesso piano ST. E si noti altresì che, se il piano ST si fa passare in modo, che resti il corpo E a destra di ST, allora il prodotto E×EI diviene negativo; e in tale caso la somma de' prodotti, che nascono moltiplicando i pesi A, B, C, D per le rispettive distanze de' loro centri di gravità da ST, toltone il prodotto del peso E moltiplicato per la distanza del suo centro di gravità da ST, uguaglia il prodotto, che si ha moltiplicando la somma di tutt' i

pesi

pesi A, B, C, D, E per la distanza di O, dall' istesso piano ST.

CAP. I.

De' modi di determinare sì i centri di gravità particolari de' corpi, che i centri di gravità comuni de' loro sistemi.

PROBL. I.

312. *Determinare meccanicamente il centro di gravità di qualsisia corpo, qualora si può egli sospendere, o appoggiare su altro corpo.*

Soluzione.

1. Si sospenda il corpo, di cui si vuole determinare il centro di gravità, per qualsisia suo punto; e, lasciato libero, si segnino sulla sua superficie, quando resta quieto, il punto, da cui è egli sospeso, e l' altro, che si trova con lui nell' istessa verticale.

2. Si replichi la medesima operazione, sospendendo di nuovo il corpo per qualsisia altro suo punto diverso dagli già notati.

Il punto, in cui s' intersecano le rette, che

che congiungono una i primi due punti segnati, e l'altra gli altri due punti pure segnati, è il centro di gravità cercato.

ALTRIMENTI.

1. Si distenda su d'un piano orizzontale un prisma triangolare di legno, appoggiandolo sul detto piano con uno de' suoi parallelogrammi.

2. Si metta il corpo sul lato superiore di tale prisma successivamente ora secondo la sua lunghezza, ora secondo la sua larghezza, e ora secondo la sua altezza; e in ciascuna situazione si vada egli tirando a destra, o a sinistra della lunghezza del prisma, finchè s'osservi orizzontale, e immobile.

3. Quando s'osserva orizzontale, e immobile in ciascuna delle dette situazioni, si segnino sulla superficie del corpo dall'una, e dall'altra parte le comuni sezioni sue col piano verticale, in cui si trova il detto lato del prisma, servendosi per conoscere la direzione di tale piano verticale d'un filo con un picciolo peso nell'estremo inferiore.

Il punto, in cui si tagliano le tre rette, comuni sezioni de' tre piani, de' quali si sono segnate la direzioni sulla superficie del corpo, è il centro di gravità cercato.

AVVERTIMENTO I.

313. Se non si può comodamente situare il corpo, di cui si cerca il sito del centro di gravità, sul lato del detto prisma, si metta egli su d'una tavola, e poscia colla tavola si metta sul lato del prisma secondo le dette situazioni: però è necessario che della tavola sia prima determinato il sito del suo centro di gravità, per poterla sempre mettere con tale punto corrispondente al detto lato del prisma.

AVVERTIMENTO II.

314. Determinato il centro O di gravità di qualunque corpo AD, è facile a determinare, se, situando tale corpo colla sua base AC sul piano orizzontale LM, debba egli restare immobile, o pure cadere sul piano LM, obbligato dalla sua gravità a girare intorno a qualche lato BC della sua base, a questo modo. Si determini la direzione della perpendicolare OP calata dal punto O sulla base AC. Se il punto, in cui tale perpendicolare incontra la base, è dentro l'istessa base, o nel suo perimetro, il corpo AD resta immobile; se poi è fuori della base AC, allora cade il corpo, girando intorno al lato BC corrispondente alla perpendicolare OP. Imperciocchè, supposta

Fig. 33, 34, e 35.

poste per P, e O tirate le orizzontali, e parallele PE, OF, delle quali PE sia perpendicolare a BC, e supposto nel piano delle dette parallele descritto col centro Q, e col raggio QO l'arco circolare OE; essendo l'angolo OQE nel primo caso ottuso, nel secondo caso retto, e nel terzo caso acuto, e conseguentemente l'arco OE nel primo caso con una sua porzione sollevata sull'orizzontale OF, nel secondo caso col primo elemento O congruente con OF, e nel terzo caso cogli suoi elementi, che si vanno da O verso E sempre avvicinando all'orizzontale QE; non si potrà il corpo AD per la gravità muovere nè nel primo, nè nel secondo caso girando intorno a BC; altrimenti nel primo caso il centro di gravità O s'allontanarebbe dal centro della Terra, salendo pel detto arco, e nel secondo caso si muoverebbe nel primo istante di tempo senz' avvicinarsi al detto centro della Terra; si muoverà poi nel terzo caso, girando intorno a BC, perchè il centro O per l'arco OE continuamente s'avvicinerà al centro della Terra.

AVVERTIMENTO III.

Fig.33. 315. Si noti però che quanto più il punto P cade lontano da BC, supposta OP sempre l'istessa, tanto più il corpo AD esige spinta maggiore per esser mosso intorno a BC;

a BC; perchè quanto più il punto P è lontano da BC, tanto più la QO s'accresce per rispetto di PO, e tanto più diviene conseguentemente maggiore l'altezza, alla quale si deve sollevare il centro di gravità O, o sia il peso di AD per far girare AD intorno a BC. Quindi s'intende perchè gli uomini slargano i piedi per mantenersi più fermi, quando temono d'essere lateralmente urtati.

AVVERTIMENTO IV.

316. Si noti di più che se LM è un piano inclinato, che si va da sinistra a destra abbassando; allora le rette PE, OF sono anch'esse inclinate, e'l corpo AD, spinto della gravità rispettiva, che ha su tale piano, deve discendere per sì fatto piano: però per l'istessa ragione, per cui sul piano orizzontale nel primo, e secondo caso si mantiene senza cadere, sul piano inclinato deve discendere senza volgersi intorno a BC, ma strisciandosi colla base AC; e per l'istessa ragione, per cui sul piano orizzontale nel terzo caso cade girandosi intorno a BC, sul piano inclinato si deve anche girare intorno a BC; e deve poi seguire a discendere strisciandosi colla base BD, o pure di nuovo rivolgendosi, se colla base BD si troverà sul piano inclinato nell'istesso caso, che s'è trovato prima colla base AC.

Fig. 33, 34, e 35.

AV-

AVVERTIMENTO V.

317. Si noti finalmente che ogni palla per qualunque piano inclinato dovrebbe discendere strisciandosi, e non girandosi continuamente; perchè la perpendicolare calata dal suo centro di gravità, ch'è l'istesso del centro della sua figura, sulla base, colla quale appoggia sul piano, ch' è il punto del contratto, cade nel medesimo punto, e non fuori di esso. Però succede il contrario a cagione di certo impedimento al moto, che soffre dal piano nel punto del contatto.

PROBL. II.

Fig.36. 318. *Dati i pesi di due corpi A, e B, determinati i loro centri di gravità particolari O, e P, e data la distanza OP, determinare il centro di gravità comune di sì fatti corpi.*

SOLUZIONE.

1. Si moltiplichi il peso A per la distanza OP, e si noti il prodotto.

2. Si divida il prodotto notato per la somma de' pesi A e B, e si noti il quoziente.

3. Si tagli QP della lunghezza, che disegna il quoziente notato.

Dico

Dico essere Q il centro di gravità cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, supposto essere Q il centro di gravità cercato, e supposto passare per P un piano, a cui sia perpendicolare OP, sarà $A \times OP = (A+B)\ QP$ (§ 311):

Dunque $QP = \dfrac{A \times OP}{A + B}$; e perciò il punto Q, determinato del modo già detto, è il centro di gravità cercato. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

319. Essendo $A \times OP = (A + B)\ QP = A \times QP + B \times QP$; sarà $A \times OP - A \times QP = B \times QP$, ovvero $A \times OQ = B \times QP$; e perciò sarà $A : B = PQ : QO$. Sicchè il centro di gravità comune Q divide la distanza de' centri di gravità particolari in ragione reciproca de' pesi.

AVVERTIMENTO I.

320. Si noti che coll'avere insegnato il modo di determinare il centro comune di gravità di due corpi, s' è nel tempo istesso in-

insegnato ancora il modo di determinare il centro comune di gravità di qualunque sistema di corpi, o che abbiano i loro centri particolari di gravità in un istesso piano, o in piani diversi. In fatti sia il sistema de' tre corpi A, B, C, che abbiano i loro centri di gravità particolari ne' punti O, P, R. Si determini prima in OP il centro di gravità comune Q de' corpi A, e B del modo già insegnato. Poscia, supposta congiunta QR, si determini dell' istesso modo in QR il punto S, che sia il centro comune di gravità della somma de' corpi A, e B, supposta col suo centro in Q, e del corpo C. Sarà S il centro di gravità comune del sistema de' tre corpi A, B, C. Imperciocchè, supposte le rette OP, QR inflessibili, le azioni, che fanno i pesi A e B su OP ne' loro luoghi, uguagliano l'azione, che farebbe su OP la somma de' pesi A, e B, se il centro di gravità di tale somma fosse in Q. Ma la somma de' pesi A, e B col centro di gravità in Q fa equilibrio col peso C, sostenuta QR da S. Dunque anche le azioni di A e B su AB fanno equilibrio coll' azione di C su QR, sostenuta QR da S. E perciò S è il centro di gravità comune del sistema de' tre corpi A, B, C. Similmente se al sistema de' tre corpi A, B, C vi si aggiugne il quarto D, che abbia il centro di gravità in T; con determinare, congiunta ST, il punto V,
cen-

centro di gravità comune della somma de' corpi A, B, C, supposta col suo centro in S, e del corpo D, s' avrà il centro comune di gravità del sistema de' quattro corpi A, B, C, D; e così procedendo innanzi.

AVVERTIMENTO II.

321. Si noti che, se dalla retta orizzontale AB sono liberamente pendenti i pesi P, Q, R, S, si può il loro comune centro di gravità determinare a quest' altro modo. Essendo le direzioni PA, QC, RD, SB, per le quali liberamente pendono i pesi P, Q, R, S dall' orizzontale AB, perpendicolari all' istessa AB; sarà la somma de' prodotti $P \times PA$, $Q \times QC$, $R \times RD$, $S \times SB$ uguale al prodotto, che nasce moltiplicando la somma de' pesi P, Q, R, S per la distanza del loro comune centro di gravità da AB (§310). Dunque, se dalla verticale BS prolungata si taglia BF della lunghezza, che disegna la somma de' detti prodotti divisa per la somma de' detti pesi, dinoterà BF di quanto nel piano verticale, che passa per AB, è distante da AB il detto comune centro di gravità. Similmente la somma de' prodotti $P \times AB$, $Q \times CB$, $R \times DB$ uguaglia il prodotto, che si ha moltiplicando la somma degli pesi P, Q, R, S per la distanza dell' istesso loro comune centro di gravità dalla verticale BF (§311). Fig. 37.

 Onde

Onde, se da BA si taglia BE della lunghezza, che disegna la somma de' detti prodotti divisa per la somma de' detti pesi, dinoterà BE di quanto il detto comune centro di gravità è distante da BF. Per la qual cosa, fatto con EB, BF il rettangolo EBFO, sarà O il centro di gravità cercato.

AVVERTIMENTO III.

322. Si noti di vantaggio che se la retta AB viene sostenuta dal punto E, resta ella in sito orizzontale, e tutt' i pesi P, Q, R, S restano equilibrati; e ciò non perchè E sia il loro comune centro di gravità, ma perchè è nella verticale EO, che passa pel detto comune centro O di gravità: anzi se AB è una verga di legno, o di metallo, e G è il suo centro di gravità particolare, congiugnendo GO, e dividendola in H in modo, che sia GH : HO, come la somma de' pesi P, Q, R, S al peso della verga; s'avrà il punto H, centro di gravità comune de'pesi, e della verga. E perciò, tirata per H la verticale HI, sarà non il punto E, ma il punto I della verga da sostenere, perchè ella si mantenghi orizzontale, e si mantenghino conseguentemente equilibrati i pesi.

AV-

AVVERTIMENTO IV.

323. Si noti finalmente che, per potere i Geometri con regole geometriche determinare i centri di gravità ne' corpi omogenei, che hanno le figure di prismi, di parallelepipedi, di piramidi, di cilindri, di coni, di sfere, di porzioni sferiche, ec., sono stati nella necessità di considerare come corpi omogenei e le linee, e le superficie, considerando in esse come infinitamente picciole le dimensioni, che loro mancano, e di cercare in esse i centri di gravità. Soggiugniamo perciò il seguente capo, in cui considerando le linee, e le superficie come corpi omogenei, e i loro elementi come piccioli pesi, insegneremo il come si possono coll' ajuto della Geometria determinare i centri di gravità delle linee, delle superficie, e de' solidi suddetti; però in ciò insegnare ci limiteremo a quelle determinazioni, che potranno nella pratica avere il loro uso.

CAP. II.

De' modi di determinare i centri di gravità delle linee, delle superficie, e de' solidi.

PROBL. III.

Fig. 38. 324. *Determinare il centro di gravità di qualunque linea retta AB.*

SOLUZIONE.

Si divida AB in due parti uguali in O. Sarà O il centro cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè gli elementi, che compongono AO, uguagliano nel numero, nella grandezza, e nelle distanze da O gli elementi, che compongono OB. Sicchè relativamente ad O la somma de' momenti degli elementi di AO uguaglia la somma de' momenti degli elementi di OB. E perciò O è il centro di gravità di AB. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

AV-

AVVERTIMENTO I.

325. Si noti che, considerandosi le linee come corpi omogenei, che habbiano i loro pesi proporzionali alle loro lunghezze, si determinerà il centro di gravità comune d' un sistema di rette, e conseguentemente del perimetro di qualunque rettilineo dell' istesso modo, che s' è determinato il centro di gravità comune di qualsisia sistema di corpi. E perciò, se si vuole determinare il centro di gravità del perimetro della figura ABCDE, si deve procedere a questo modo. 1. Si divida ogni lato in due parti uguali in F, G, H, I, K. 2. Si congiunga FG, e si divida ella in O in modo, che sia GO : OF = AB : BC; sarà O il centro comune di AB, BC. 3. Si congiunga OH, e si divida in P in guisa, che sia HP : PO = AB + BC : CD; sarà P il centro comune di AB, BC, CD. 4. Si congiunga PI, e si divida in Q in modo, che sia IQ : QP = AB + BC + CD : DE; sarà Q il centro comune di AB, BC, CD, DE. 5. Finalmente si congiunga QK, e si divida in R in modo, che sia KR : RQ = AB + BC + CD + DE : EA; sarà R il centro di gravità cercato.

Fig. 39.

AVVERTIMENTO II.

326. A questo modo operando si trova essere 1°. il centro di gravità del perimetro d'un triangolo equilatero nella perpendicolare calata su d'un lato dal vertice dell'angolo opposto, e distante dall'istesso lato della terza parte della medesima perpendicolare, e conseguentemente nel centro del cerchio circoscrittibile intorno all'istesso triangolo; 2°. il centro di gravità del perimetro di qualunque parallelogrammo nella intersecazione delle due sue diagonali; e 3°. finalmente il centro di gravità del perimetro d'ogni figura regolare nel centro del cerchio circoscrittibile intorno all'istessa figura.

PROBL. IV.

Fig.40. 327. *Determinare il centro di gravità di qualunque arco circolare AM.*

SOLUZIONE.

1. Si trovi il centro O del cerchio, e, tirato il raggio OA, si tiri l'altro OB perpendicolare ad OA, che incontra l'arco AM continuato in B.

2. Calata da M su AO la perpendicolare MP; si determinino OE, OD, delle qua-

quali sia la prima quarta proporzionale in ordine all'arco AM, al raggio del cerchio, e alla retta MP, e la seconda quarta proporzionale in ordine all' istesso arco AM, al raggio del cerchio, e alla retta AP.

3. Colle rette DO, OE si faccia il rettangolo DOEQ.

Dico che Q è il centro di gravità cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Da M si cali su OB la perpendicolare MC. Si congiunga il raggio OM. Si suppongano tirata mp parallela, e infinitamente vicina a MP, e da m calata su MP la perpendicolare mR. Sarà il triangolo MCO simile al triangoletto MRm. E perciò saranno

$$Mm : MR = OM : MC$$
$$Mm : mR = OM : OC,$$

e conseguentemente il prodotto di Mm, MC uguale al prodotto di OM, MR, e 'l prodotto di Mm, OC, o di Mm, MP uguale al prodotto di OM, Rm, o di OM, Pp. Ma il prodotto di Mm, MC esprime il momento dell'elemento Mm relativamente a BO, e 'l prodotto di Mm, MP esprime il momento dell' istesso elemento Mm relativamente ad OA. Dunque il momento dell' elemento Mm dell' arco AM relativa-

mente ad OB è espresso ancora dal prodotto del raggio OM, e dell' elemento MR di MP, corrispondente ad Mm, e 'l momento dell' istesso Mm relativamente ad OA è espresso pure dal prodotto del raggio OM, e dell' elemento Pp di PA, corrispondente anche ad Mm. Dell' istesso modo si dimostra che il momento d' ogni altro elemento dell' arco AM relativamente a OB è espresso dal raggio OM moltiplicato per l' elemento corrispondente di MP, e che il momento d' ogni altro elemento dell' istesso arco AM relativamente ad OA è espresso dal raggio OM moltiplicato per l' elemento corrispondente di PA. Sicchè la somma de' momenti di tutti gl' infiniti elementi dell' arco AM relativamente a OB uguaglia il prodotto di OM, MP, e la somma de' momenti degli medesimi infiniti elementi dell' arco AM relativamente ad OA uguaglia il prodotto di OM, PA. Sono di più la prima delle dette somme de' momenti uguale al prodotto dell' intero arco AM moltiplicato per la distanza del suo centro di gravità da OB, e la seconda uguale al prodotto dell' istesso arco AM moltiplicato per la distanza del medesimo centro da OA. Dunque il prodotto di OM, MP uguaglia il prodotto dell' arco AM moltiplicato per la distanza del suo centro di gravità da OB, e 'l prodotto di OM, PA uguaglia il prodotto dell' istesso arco AM moltiplicato per

la

la distanza dell' istesso centro da OA. Per la qual cosa, essendo OE quarta proporzionale in ordine all'arco AM, al raggio OM, e alla retta MP, e la retta OD quarta proporzionale in ordine all' arco AM, al raggio OM, e alla retta PA, daranno EO la distanza del centro cercato da OB, e OD la distanza dell' istesso centro da OA. E perciò Q è il centro di gravità cercato Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

328. Si congiunga la corda AM, e per Q si tiri il raggio OF. Essendo alla ragione dell' arco AM al raggio OM uguale sì la ragione di MP : OE, che quella di PA : OD, o di PA : EQ; sarà MP : PA = OE : EQ. Sicchè l' angolo AMP uguaglia l' angolo EOQ, e 'l triangolo MPA è simile al triangolo OEQ (§ 302 *del tom. 2.*). Ma l' angolo AOM è il doppio dell' angolo AMP, appoggiando ambidue ad archi uguali, ed essendo uno al centro, e l' altro alla periferia. Dunque l' angolo AOM è anche il doppio dell' angolo EOQ. Per la qual cosa il centro Q di gravità di qualunque arco circolare AM cade nel raggio del cerchio, che divide in due parti uguali l' angolo AOM, e conseguentemente l' istesso arco AM.

CO-

COROLLARIO II.

329. Essendo in oltre l'arco AM : MO = MP : OE = MA : OQ; sarà, permutando, l'arco AM alla sua corda MA, come OF : OQ. Sicchè si determina il centro Q di gravità di qualunque arco circolare AM, tirando il raggio OF, che divida l'arco in due parti uguali, e determinando in tale raggio la porzione OQ, quarta proporzionale in ordine all'arco AM, alla sua corda, e al raggio del cerchio.

COROLLARIO III.

330. Se l'arco AM si fa uguale ad AB, quarta parte della periferia, si fanno MP, PA rispettivamente uguali agli raggi OB, OA. In tale caso sì OE, che OD sarà terza proporzionale in ordine all'arco AB, e al raggio; e 'l centro di gravità sarà nel raggio, che divide l'arco AB in due parti uguali, e distante dal centro O, per quanto il disegna la quarta proporzionale trovata in ordine all'arco AB, alla sua corda, e al raggio.

COROLLARIO IV.

Fig. 41. 331. Se l'arco sarà la mezza periferia AEB, il suo centro di gravità Q caderà nel raggio

gio OE, che la divide in due parti uguali, e distante dal centro O, per quanto il disegna la quarta proporzionale trovata in ordine alla mezza periferia, al diametro, e al raggio, o la terza proporzionale trovata in ordine all'arco AE, e al raggio.

COROLLARIO V.

332. Se finalmente l'arco CED sarà maggiore della mezza periferia, il suo centro di gravità Q caderà nel raggio OE, che il divide in due parti uguali, e distante dal centro O, per quant' il disegna la quarta proporzionale trovata in ordine all'arco CED, alla sua corda CD, e al raggio OE. Essendo dunque OQ tanto minore per rispetto di OE, quant' è CD minore per rispetto dell'arco CED; quando CD diviene nulla per rispetto dell' arco CED, il che accade quando l' arco CED diviene uguale all' intera periferia, diverrà OQ nulla anche per rispetto di OE. E perciò il centro del cerchio è il centro di gravità dell' intera periferia.

PROBL. V.

333. *Determinare il centro di gravità di qualunque triangolo ABC.* Fig. 42.

So-

SOLUZIONE.

1. Si divida qualunque lato AC in due parti uguali in D; e dal vertice dell'angolo opposto al lato AC si tiri al punto D la retta BD.

2. Si tagli da BD la sua terza parte DO.

Dico essere O il centro di gravità cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Considerandosi qui le linee, e le superficie come corpi omogenei, che abbiano infinitamente picciole le dimensioni, che loro mancano, si debbono considerare le linee come elementi delle superficie. Sicchè, dividendo BD la AC in due parti uguali, passerà BD pel centro di gravità dell'elemento AC del triangolo ABC, e dividerà conseguentemente tale elemento in due porzioni d'uguali momenti per rispetto di essa. Dividendo in oltre la BD in due parti uguali tutte le infinite parallele ad AC, che si possono tirare nel triangolo ABC, dividerà BD tutti gl'infiniti elementi del triangolo ABC in parti di momenti per rispetto dell'istessa BD rispettivamente uguali. Onde per rispetto di BD la somma de' momenti degli elementi del triangolo, che so-

no

no a destra, uguaglia la somma de' momenti di quelli, che sono a sinistra. E perciò BD è diametro di gravità del triangolo. Similmente, divisa BC in due parti uguali in E, e congiunta AE, sarà AE anche diametro di gravità dell' istesso triangolo. Sicchè il punto O è il centro di gravità (§297). Finalmente, essendo DE parallela ad AB, e la metà dell'istessa AB, sarà BO : OD = BA : DE = 2 : 1. Dunque BO è il doppio di OD, e conseguentemente OD è la terza parte di BD. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

334. Insegnato già il modo di determinare il centro di gravità di qualunque triangolo, è facile a determinare il centro di gravità d' ogni altro rettilineo, purchè si considerino qui le superficie come corpi omogenei, che abbiano pesi proporzionali alle loro grandezze. Sia ABCDE un rettilineo qualunque. Si divida egli ne' triangoli ABC, ACD, ADE, e si determinino i loro centri di gravità particolari O, P, Q. Poscia, congiunta OP, si divida ella in R in modo, che sia PR : RO, come il triangolo ABC al triangolo ACD; sarà R il centro di gravità comune de' triangoli ABC, ACD, e conseguentemente il centro di gravità del quadrilatero ABCD. Similmente, Fig.43.

con-

congiunta RQ, si divida ella in S in modo, che sia QS : SR, come il quadrilatero ABCD al triangolo ADE; sarà S il centro di gravità comune del quadrilatero ABCD, e del triangolo ADE, e conseguentemente sarà il centro di gravità del rettilineo ABCDE.

AVVERTIMENTO II.

Fig.44. 335. Se il rettilineo è il parallelogrammo ABCD. Perchè, tirata la diagonale AC, e tirate le rette AE, CF, che dividano i lati BC, AD in due parti uguali, e presi in esse i punti O, e P, che sieno i centri di gravità de' triangoli ABC, ADC, è AE = CF, e conseguentemente AO = CP; saranno, congiunta OP, ne' triangoli equiangoli AOQ, CPQ il lato OQ = QP, e AQ = QC. Ma, per l' uguaglianza de' triangoli ABC, ADC, il centro loro comune di gravità è il punto Q. Dunque il centro di gravità di qualunque parallelogrammo è il punto, che divide una sua diagonale in due parti uguali.

PROBL. VI.

Fig.45. 336. *Determinare il centro di gravità di qualunque settore circolare AOB.*

Soluzione.

1. Si divida l' arco AB in due parti uguali in E, e si congiunga il raggio OE.

2. Congiunta la corda AB, si trovi OP, quarta proporzionale in ordine all' arco AB, alla sua corda, e alle due terze parti di OE.

Sarà P il centro di gravità cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Col centro O, e coll'intervallo OC, che sia $\frac{2}{3}$ di OB, si descriva l' arco CFD, e si congiunga CD. Potendosi ogni settore AOB considerare come composto da infiniti triangoli isosceli infinitamente piccioli, che abbiano per loro basi le rette infinitamente picciole, dalle quali si può considerare composto l' arco AB; saranno i centri di gravità di tali piccioli triangoli, o sia degli elementi del settore AOB ne' raggi, che dividono in due parti uguali le basi di sì fatti triangoletti, e distanti da O per le due terze parti de' medesimi raggi (§233), e conseguentemente nell'arco CFD. Or come i detti centri di gravità si debbono considerare ugualmente gravi, e a distanze uguali tra loro, essendo centri di gravità di triangoletti uguali; così il centro di gravità comune di tutt' i detti triangoletti, e conse-

guen-

guentemente il centro di gravità del settore AOB sarà l' istesso del centro di gravità dell' arco CFD. E perciò, tagliando da OE la OP, quarta proporzionale in ordine all' arco CFD, alla sua corda CD, e al raggio OF, ovvero quarta proporzionale in ordine all' arco AEB, alla sua corda AB, e alle due terze parti di OE, darà P il centro di gravità cercato del settore AOB. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

337. Essendo il punto Q centro di gravità del triangolo AOB (§333), e 'l punto P centro di gravità del settore AOB: se si determina PR, quarta proporzionale in ordine alla porzione circolare BEA, al triangolo rettilineo AOB, e alla retta QP, darà R il centro di gravità della porzione BEA.

COROLLARIO II.

338. Se il settore è un mezzo cerchio, il centro di gravità cade nel raggio, che divide la mezza periferia in due parti uguali, e tanto distante dal centro del cerchio, quanto il disegna la quarta proporzionale trovata in ordine all' arco del quadrante, al raggio, e alli $\frac{2}{3}$ dell' istesso raggio.

CO-

COROLLARIO III.

339. Se il settore è maggiore del mezzo cerchio, come CEDO; il suo centro di gravità Q. cade nel raggio OE, che divide l' arco CED in due parti uguali, ed è tanto distante dal punto O, quanto il disegna la quarta proporzionale trovata in ordine all' arco CED, alla sua corda CD, e alli $\frac{2}{3}$ del raggio OE. Essendo dunque OQ tanto minore per rispetto degli $\frac{2}{3}$ di OE, quant'è CD minore per rispetto dell' arco CED; quando CD diviene nulla per rispetto dell' arco CED, diviene OQ nulla per rispetto degli $\frac{2}{3}$ di OE. E perciò il centro O del cerchio è il centro di gravità dell' istesso cerchio. Fig.41

PROBL. VII.

340. *Determinare il centro di gravità della superficie sferica di qualunque porzione ACB di sfera.* Fig.46.

SOLUZIONE.

Si divida l' altezza PC della porzione in due parti uguali in Q. Sarà Q il centro di gravità cercato.

DIMOSTRAZIONE.

Dividendosi la superficie sferica ACB da qualunque piano, che passa per PC, in due porzioni uguali, e perfettamente simili; non solamente il numero degli elementi d' una di sì fatte porzioni uguaglia il numero degli elementi dell' altra, ma ben anche gli elementi corrispondenti in ambe le porzioni, nelle quali resta divisa la superficie ACB da uno de' detti piani, sono uguali, e ugualmente distanti dall' istesso piano. Sicchè per rispetto di qualunque piano, che passa per PC, la somma de' momenti delle parti della superficie, che sono di qua dal piano, uguaglia la somma de' momenti delle parti, che sono al di là dell' istesso piano. E perciò ogni piano, che passa per PC, è piano di gravità della superficie ACB, e conseguentemente PC è asse di gravità della medesima superficie. In oltre se s' intendono CQ, QP divise in parti uguali, e infinitamente picciole, e per gli punti delle divisioni s' intendono passare piani paralleli ad AB, de' quali il solo LM, che passa per Q, s' osserva tirato; le fascette sferiche, nelle quali resta la superficie ACB divisa da tali piani, saranno tutte uguali (§ 163 *del tom. 4*). Or avendo le fascette ugualmente distanti dal piano LM elementi uguali di numero, uguali tra loro, e ugualmente

te distanti dal detto piano LM, sarà per rispetto del piano LM la somma de' momenti degli elementi di una di tali fascette uguale alla somma de' momenti degli elementi dell'altra. E perciò per rispetto del piano LM la somma de' momenti di tutti gli elementi della fascia ABML uguaglia la somma de' momenti degli elementi della superficie LCM. Per la qual cosa della superficie sferica ACB il piano LM è anche piano di gravità, e conseguentemente il punto Q è centro di gravità. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

341. Quindi il centro di gravità della superficie della mezza sfera è il punto, che divide in due parti uguali l'altezza della mezza sfera, e 'l centro di gravità della superficie dell'intera sfera è il centro istesso della sfera.

PROBL. VIII.

342. *Determinare il centro di gravità di qualunque prisma.*

Soluzione.

Si determinino i centri di gravità delle due basi parallele, uguali, e simili. Il punto,

to, che divide in due parti uguali la retta, che congiugne tali centri di gravità, è il centro di gravità cercato.

DIMOSTRAZIONE.

S'intenda il prisma diviso da' infiniti piani paralleli alla base, e a distanze uguali, e infinitamente picciole tra loro. Saranno tali sezioni uguali, e simili alla base. Onde la retta, che congiugne i centri di gravità delle due opposte basi, deve passare per gli centri di gravità di tutte le dette infinite sezioni. Ma considerando tali sezioni come corpi omogenei, dotati di gravità, si debbono considerare come gli elementi del prisma. Sicchè la detta retta passa per gli centri di gravità di tutti gli elementi, ne' quali dalle dette sezioni resta diviso il prisma. E perciò si può tutta la gravità del prisma considerare come equabilmente diffusa nella detta retta. Or, essendo la gravità equabilmente diffusa in una retta, il suo centro di gravità è il punto, che la divide in due parti uguali (§ 324). Dunque il centro di gravità del prisma è il punto, che divide in due parti uguali la retta, che congiugne i centri di gravità delle sue opposte basi. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

CO-

COROLLARIO.

343. Potendosi ogni cilindro considerare senza errore sensibile come un prisma terminato da infiniti parallelogrammi infinitamente piccioli (§ 33 *del tom.*4); sarà il centro di gravità d'ogni cilindro il punto, che divide in due parti uguali il suo asse.

PROBL. IX.

344. *Determinare il centro di gravità di qualunque piramide triangolare ABCD.* Fig. 47.

SOLUZIONE.

Si determini il centro di gravità O del triangolo ABC, o di qualunque altro, che termina la piramide. Dico che il punto Q della retta DO, che divide DO in modo, che sia OQ la quarta parte di DO, è il centro di gravità cercato.

DIMOSTRAZIONE.

S'intenda la piramide ABCD divisa da infiniti piani paralleli al triangolo ABC, e a distanze uguali, e infinitamente picciole tra loro; saranno tali sezioni tutte triangoli simili ad ABC (§ 126 *del tom.*4). Onde la retta OD passerà per gli centri di gra-

vità di tutte le dette infinite sezioni, e conseguentemente per gli centri di gravità di tutti gli elementi, ne' quali resta da tali piani divisa la piramide; e perciò passerà pel centro di gravità dell' intera piramide. Similmente si dimostra che, determinato il punto P, centro di gravità del triangolo ACD, e congiunta BP, passerà BP pel centro di gravità dell' istessa piramide. Or, avendo ogni corpo un solo centro di gravità (§ 299), le due rette DO, BP si debbono interfecare, e'l punto Q dell' interfecazione deve essere il centro di gravità della piramide. E perchè, tirate ne' triangoli ABC, ADC per O, e P dagli vertici degli angoli opposti ad AC le rette BE, DE, queste si debbono unire in E, ed essere EO, EP le terze parti rispettivamente di BE, DE (§ 333); perciò, congiunta OP, sarà nel triangolo EDB la OP parallela a BD, e terza parte dell'istessa BD. Per la qual cosa, essendo ne' triangoli simili OQP, DQB la OQ : QD = OP : BD, sarà OQ terza parte di QD, e conseguentemente quarta parte dell' intera OD. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

AV-

AVVERTIMENTO.

345. Se la piramide è poligona. Perchè la retta, che congiugne il suo vertice col centro di gravità della base, passa per gli centri di gravità di tutte le infinite sezioni parallele alla base, passa pure pel centro di gravità dell' istessa piramide. Ma se s' intende divisa la piramide poligona nelle piramidi triangolari, nelle quali si può dividere, i centri di gravità particolari di tali piramidi triangolari si trovano nelle rette, che congiungono il loro vertice comune co' centri di gravità delle loro basi, e distanti dalli centri delle basi per le quarte parti delle medesime rette; onde si trovano tutti in un piano parallelo alla base dell' intera piramide, che taglia verso l' istessa base dalla retta, che congiugne il vertice della piramide col centro di gravità della medesima base, la quarta parte dell' istessa retta. Or essendo tutt' i detti centri particolari nel detto piano, sarà il centro comune di gravità di tutte le dette piramidi triangolari, e conseguentemente il centro di gravità della piramide poligona nel medesimo piano; e perciò sarà nel punto di tale piano, in cui incontra la retta tirata dal vertice della piramide al centro di gravità della sua base.

COROLLARIO I.

346. Quindi il centro di gravità d'ogni piramide poligona, e conseguentemente d'ogni cono, che si può senza sensibile errore considerare come una piramide poligona (§ 28 *del tom.* 4.), è nella retta, che congiugne il vertice col centro di gravità della base, e distante dal medesimo centro della base per la quarta parte dell'istessa retta.

COROLLARIO II.

Fig. 48. 347. Se ABCD è un cono troncato dal piano DC parallelo alla base; determinando l'asse FE dell'intero cono ABE, e conseguentemente l'asse EG della parte mancante DCE, e prendendo FO, GP, quarte parti rispettivamente di FE, GE, s'avranno i centri di gravità O, e P dell'intero cono ABE, e della parte mancante DCE. Onde, se si determinerà OQ quarta proporzionale in ordine al cono troncato ABCD, alla parte mancante DCE, e alla retta PO, s'avrà il punto Q, centro di gravità del cono troncato ABCD. Dell'istesso modo si deve procedere per avere il centro di gravità d'una piramide troncata da un piano parallelo alla base.

PRO-

PROBL. X.

348. *Determinare il centro di gravità di qualunque settore sferico AODG.* Fig. 46.

SOLUZIONE.

S'intenda nel settore tirato il raggio OG al vertice G della porzione ADG corrispondente; e in tale raggio s'intenda preso il punto R tale, che sia OR uguale alle $\frac{3}{4}$ parti del raggio OG, toltene $\frac{3}{8}$ parti dell' altezza GH della porzione AGD.
Dico che il punto R è il centro di gravità cercato.

DIMOSTRAZIONE.

S'intenda essere FOEI un settore simile ad AODG, il cui raggio OE sia $\frac{3}{4}$ di OD; e s'intendano delle basi AD, FE delle porzioni simili DGA, EIF essere i diametri DA, EF. Potendosi il settore AODG considerare come composto da infinite piramidi infinitamente picciole, ed uguali, che abbiano per vertice comune il punto O, e per basi i piccioli piani, dagli quali si può considerare composta la superficie sferica AGD; saranno i centri di gravità di sì fatte picciole piramidi, o sia degli elementi del settore AODG ne' raggi, che giungono agli cen-

centri di gravità delle picciole basi di tali piramidette, e distanti da O per le $\frac{3}{4}$ parti de' medesimi raggi (§ 345), e conseguentemente nella superficie sferica EIF. Or come i detti centri di gravità si debbono considerare ugualmente gravi, e ad uguali distanze tra loro, essendo centri di gravità di piramidette uguali: così il centro di gravità comune di tutte le dette piramidette, e conseguentemente il centro di gravità del settore AODG sarà l' istesso del centro di gravità della superficie sferica EIF. Onde, dividendo l' altezza IK della porzione EIF in due parti uguali in R, sarà R il centro di gravità della superficie EIF (§ 340), e conseguentemente del settore AODG. Sono in oltre le porzioni sferiche EIF, DGA simili. Dunque sta IK : GH = EF : DA = OE : OD; e perciò di GH è la IK $\frac{3}{4}$ parti, e la IR $\frac{3}{8}$ parti. Per la qual cosa, essendo OR = OI — IR, sarà OR uguale alle $\frac{3}{4}$ di OG, toltene le $\frac{3}{8}$ di GH. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

349. Se il settore AODG diventa la mezza sfera. Perchè in tale caso si fa GH = GO; sarà il centro di gravità della mezza sfera nel raggio, che giugne al suo vertice, e distante dal centro della sfera per $\frac{3}{8}$ dell' istesso raggio.

CO-

COROLLARIO II.

350. Se il settore sarà ANDO; sarà, supposta HN essere l' altezza della porzione AND, il centro di gravità nel raggio ON, e distante dal centro O per le $\frac{3}{4}$ parti di ON, toltene le $\frac{3}{8}$ parti di HN. E perciò, se il settore diventa l' intera sfera; perchè in tale caso si fa $HN = GN$, e sono le $\frac{3}{8}$ di $GN = \frac{3}{4}$ di ON, il centro di gravità allora cade nel centro O dell' istessa sfera.

CAP. III.

Delle Macchine semplici.

DEFINIZIONE.

351. Si dicono *Macchine semplici* quelle, le quali non sono composte da più semplici, ma da esse si compongono tutte le altre, che si chiamano perciò *Macchine composte*.

AVVERTIMENTO I.

352. Le macchine semplici sono le sette seguenti, cioè la Leva, o sia il Vette, la Bi-

Bilancia, l'Asse nella ruota, la Carrucola, o sia Taglia, il Piano inclinato, il Cuneo, e la Vite. Le macchine composte poi possono essere infinite; perchè in infinite maniere si possono combinare, replicare, e disporre, secondo gl'infiniti diversi bisogni, le macchine semplici, dalle quali si compongono. In questo capo parleremo delle semplici, nell' altro tratteremo delle composte, per quanto esige il nostro istituto.

AVVERTIMENTO II.

353. Si noti che in ogni macchina, oltre della resistenza, che fa il corpo, che si deve muovere, premere, o rompere, v' è anche la resistenza, che deriva dall'inevitabile stropicciamento delle sue parti. La potenza, che fa equilibrio colla prima di sì fatte resistenze, e ch' io chiamo *Potenza equilibrante*, basta per mantenere la macchina in quiete; ma per muoverla, è necessario d'esser ella accresciuta a segno, che ecceda di tanto col momento suo il momento dell' istessa resistenza, di quanto v' è bisogno per vincere l' altra resistenza ancora. Non è l' istesso dunque cercare in una macchina, a cui è applicata qualche resistenza, la potenza equilibrante, che la potenza movente; e nella maggior parte delle macchine conviene di molto accrescere le potenze equilibranti, perchè divenghino potenze moventi,

venti, anche nel caso che le macchine sieno perfette. I principj fin qui stabiliti sono sufficientissimi a farci determinare con esattezza in ogni macchina la prima delle dette potenze; ma non bastano a condurci alla determinazione del quanto si deve la potenza equilibrante accrescere, perchè divenghi potenza movente. Nel trattare delle macchine insegneremo a determinare in esse le potenze equilibranti; nel trattare poi appresso della resistenza, che deriva dallo stropicciamento de' corpi, insegneremo in che modo si deve, se non esattamente, almeno a un di presso determinare di quanto le potenze equilibranti nelle macchine perfette si debbono accrescere, per ridurle a potenze moventi. Ho detto nelle macchine perfette; perchè nelle imperfette, come sono quelle, che hanno ricevuto una cattiva costruzione, o sono formate da materie non adatte al bisogno, o sono coll' uso divenute in alcune parti logore, o marcite, o sono in alcune parti per negligenza divenute ruginose, ec., difetti, che ordinariamente s' incontrano nelle macchine, che s' adoprano a varj usi, non si può avere regola alcuna, che ci possa far determinare di quanto le potenze equilibranti debbono essere accresciute, per averne le potenze moventi; variando in esse le resistenze, che derivano dallo stropicciamento, come variano i gradi delle loro imperfezioni.

Della

Della Leva.

DEFINIZIONE I.

354. Si dice *Leva* un lungo palo di legno, o di ferro, che si fa muovere intorno a un suo punto, col quale si tiene appoggiato a qualche sostegno.

DEFINIZIONE II.

355. Il punto, con cui la leva s'appoggia al sostegno, si dirà *Punto d' appoggio*.

DEFINIZIONE III.

Fig.49. 50, e 51

356. Contrassegnino AB una leva, P la potenza applicata a lei, R la resistenza, e D il sostegno. Se D tramezza tra P, e R, (Fig.49), si dice AB *leva di primo genere*; se poi R tramezza tra P, e D (Fig. 50), si dice allora CB *leva di secondo genere*; se finalmente P tramezza tra R, e D (Fig.51), allora AC si dice *leva di terzo genere*.

TEOR.

TEOR. I.

357. *In ogni leva la potenza è in equilibrio colla resistenza, se sono tra loro in ragione reciproca delle distanze, che hanno le loro direzioni dal punto d' appoggio.*

DIMOSTRAZIONE.

Contrassegnino AB, CB, CA le tre spezie di leve, e in tutte P la potenza, e R la resistenza. (Fig. 49, 50, 51, 52, 53, e 54.)

I. Sieno le direzioni di P, e R perpendicolari alle leve. Si sforzeranno P, e R di muovere le leve intorno a C colle intere loro efficacie, come se fossero in B, e A applicate. E perciò saranno P, e R in equilibrio, se sarà $P : R = AC : CB$ (§284), cioè se saranno tra loro in ragione reciproca delle distanze, che hanno le loro direzioni dal punto d' appoggio C. (Fig. 49, 50, e 51.)

II. Sieno BG, AH le direzioni di P, e R inclinate alle leve. Da C si calino su tali direzioni le perpendicolari CE, CF; e, presi in BG, AH i punti G, e H ad arbitrio, si facciano i rettangoli IK, LM. Contrassegnando con BG, AH le intere forze, colle quali P, e R fanno azioni per le direzioni BG, AH, contrassegneranno BI, AL le loro porzioni, colle quali si sforzeranno di far muovere AB intorno a C. Dunque (Fig. 52, 53, e 54.)

que nel caso dell'equilibrio tra P, e R, chiamando p, ed r le forze espresse da BI, AL, s'avranno

$$\begin{aligned} P : p &= BG : BI = CB : CE \\ p : r &= \quad AC : CB \\ r : R &= AL : AH = CF : AC. \end{aligned}$$

E perciò

$$P : R = CF : CE.$$

Ch'è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

358. Quindi per rispetto della resistenza R la potenza P nel caso della *Fig.* 49. può essere minore, uguale, o maggiore, nel caso della *Fig.* 50 deve essere sempre minore, e nel caso della *Fig.* 51. deve essere sempre maggiore.

COROLLARIO II.

359. Essendo ne' casi delle *Fig.* 52, 53, e 54 P in equilibrio con R, quando sta P: R = CF: CE, e l' istessa R in equilibrio con un' altra potenza Q, supposta applicata in B verticalmente alle leve, quando sta R: Q = BC: CF; sarà P: Q = BC:CE, ovvero come il seno massimo al seno dell' an-

angolo CBG. Sicchè quanto più l'angolo CBG si discosta dal retto, tanto più la potenza P, ch' è in equilibrio colla resistenza R, deve farsi maggiore. Per la qual cosa s'applica la potenza alla leva col massimo vantaggio, facendola agire per direzione perpendicolare all'istessa leva; e in tal modo supporremo appresso sempre alla leva applicata la potenza.

COROLLARIO III.

360. Si suppongano nel caso della fig. 50 la leva orizzontale, e in B posto un sostegno in vece della potenza P, per sostenere lo sforzo della resistenza R; sarà la forza, colla quale sarà premuto tale sostegno da R, uguale alla potenza P, e perciò sarà tanto minore di R, quant' è AC minore per rispetto di CB. Similmente la forza, colla quale sarà premuto il sostegno D, sarà tanto minore di R, quant' è BA minore di BC. Dunque i sostegni posti in B, e D sostentano del peso R porzioni, che sono in ragione reciproca delle distanze de' punti d' appoggi dal punto A. E perciò i pilastri, che sostengono una cupola, sostengono pesi uguali, se il centro di gravità del peso della cupola cade nella verticale, che passa pel centro della sua base; altrimenti sostengono pesi disuguali, e tale disuglianza di pesi è molte volte la cagione della loro ruina.

COROLLARIO IV.

Fig.55. 361. Se le due leve EF, GH appoggiano co' loro estremi a quattro sostegni, e nel mezzo di tali leve si fa co' suoi estremi appoggiare l' altra CD, e l' altra leva AB si fa appoggiare con un estremo nel mezzo di CD, e coll' altr' estremo a un sostegno: presa la porzione AO il quadruplo di OB, e sospeso il peso P da O, i cinque sostegni, posti negli estremi E, F, G, H, A, sosterranno il peso P, e ognuno ne sosterrà di tale peso $\frac{1}{5}$. Imperciocchè, essendo AO il quadruplo di OB, del peso P il sostegno, ch' è in A, ne sostiene $\frac{1}{5}$, e la leva CD ne sostiene in B $\frac{4}{5}$; e perciò la leva EF ne sostiene in C $\frac{2}{5}$, e la leva GH ne sostiene in D anche $\frac{2}{5}$, e conseguentemente ognuno de' sostegni, che sono negli estremi E, F, G, H, ne sostiene $\frac{1}{5}$. Quindi s' intende in che modo cinque uomini con quattro leve possono sostenere un peso, sostenendone ognuno la quinta parte.

AVVERTIMENTO.

362. Ancorchè ciò, che s' è dimostrato fin qui della leva, supponga l' equilibrio tra la potenza, e la resistenza, senza riguardo al peso della leva: nondimeno in cercare ne' seguenti problemi l' equilibrio tra la potenza,

za, e la resistenza, che si supporranno sempre fare le loro azioni per direzioni perpendicolari alla leva, terremo conto anche del peso della leva. Sia perciò il

PROBL. XI.

363. *Date di qualunque leva le distanze AC, CB, e la resistenza R, determinare la potenza P, che faccia equilibrio colla data resistenza.* Fig.49, 50, e 51.

SOLUZIONE.

1. Si determinino della leva il centro di gravità O, e'l peso; e si misuri la distanza OC.

2. Si trovi un peso, che sia quarto proporzionale in ordine ad AC, a CO, e al peso della leva; e tale peso si tolga nel caso della Figura 49 dalla resistenza R, e ne' casi delle Fig. 50, e 51 s'aggiunga all' istessa resistenza R, notando nel primo caso il residuo, e negli altri casi la somma.

3. Si determini in ordine a BC, a CA, e al residuo notato, o alla notata somma il quarto proporzionale.

Darà sì fatto quarto proporzionale la potenza P cercata.

PROBL. XII.

364. *Date di qualunque leva le distanze*

AC, CB, e la potenza P, determinare la resistenza R, che può sostenere in equilibrio la potenza P.

SOLUZIONE.

1. Si determini della leva il centro di gravità O, e 'l peso; e si misuri la lunghezghezza OC.

2. Si trovi un peso, che sia quarto proporzionale in ordine a BC, a CO, e al peso della leva; e tale peso s' aggiunga nel caso della Fig.49 alla potenza P, e ne' casi delle Fig.50, e 51 si sottragga dall' istessa potenza P, notando nel primo caso la somma, e negli altri casi il residuo.

3. Si determini in ordine ad AC, a CB, e alla somma notata, o al notato residuo il quarto proporzionale.

Darà sì fatto quarto proporzionale la resistenza R cercata.

PROBL. XIII.

Fig.49. 365. *Determinare nella leva di primo genere AB il punto d' appoggio C, acciò la data resistenza R faccia equilibrio colla data potenza P.*

SOLUZIONE.

1. Si determini della leva AB il centro

tro di gravità O, e 'l peso; e si misuri la lunghezza OA.

2. Si moltiplichino il peso della leva per la lunghezza OA, e la potenza P per la lunghezza AB.

3. Si divida la somma di tali prodotti per la somma della potenza P, della resistenza R, e del peso della leva.

Il quoziente darà la distanza AC, e determinerà per conseguenza il punto cercato C.

AVVERTIMENTO I.

366. Si noti che i martelli, quando colle loro parti bifurcate s' adoperano a spiccar chiodi da checchessia, le tenaglie, le forbici, i remi, ec. non sono, se non una, o due leve insieme; e perciò ripetono l' efficacia nelle loro operazioni dalla natura della leva.

AVVERTIMENTO II.

367. Si noti di più che, se si vuole mantenere in equilibrio il corpo DE, appoggiato coll' estremo E ad un sostegno, e mantenere dall' estremo B coll' ajuto della leva AB, appoggiata anch' ella al sostegno C; si può determinare allora la potenza da applicarsi in A a questo modo. Si trovi prima il centro di gravità O del corpo, e si determini la linea di direzione OF. Poscia si trovi in or- Fig. 56.

ordine al prodotto delle lunghezze AC, BE, al prodotto delle lunghezze BC, FE, e al peso del corpo DE il quarto proporzionale. Darà sì fatto quarto proporzionale la potenza cercata. Imperciocchè la detta potenza mantiene in equilibrio il corpo DE con sostenere lo sforzo, che fa in B l'istesso corpo DE, appoggiato in E. Dunque la detta potenza sta al detto sforzo, come BC: CA. E' pure il detto sforzo al peso di DE, come EF: BE (§357). Dunque la detta potenza è al peso di DE in ragione composta dalle ragioni di BC: CA, e di FE: BE, e perciò come il prodotto di BC, FE al prodotto di AC, BE. Sicchè il quarto proporzionale trovato in ordine al prodotto di AC, BE, al prodotto di BC, FE, e al peso di DE dà la potenza cercata.

Della Bilancia.

DEFINIZIONE I.

368. Si chiama *Bilancia* quello strumento comune, che consiste in un' asta di metallo, o di legno con due scudelle pendenti dagli suoi estremi, e che viene dal mezzo dell'

dell' isteſſa aſta ſoſtenuto, quando ſi hanno col ſuo ajuto a peſare de' corpi.

DEFINIZIONE II.

369. Contraſſegni DAFBE una bilancia. Si diranno di tale bilancia AB il *Giogo*, AC e CB le *Braccia*, D ed E le *Scudelle*, le laſtrette CF, che ſono congiunte in F, e che con un picciolo aſſe ſono unite anche al giogo in C, la *Trutina*, e la lametta ſottile CG, terminata in una acuta punta, che va fiſſa al giogo, ed è perpendicolare all' iſteſſo giogo, *Linguetta*, o *Eſame*. Fig.57

AVVERTIMENTO I.

370. Si giudica eſſervi nella bilancia equilibrio, quando s' oſſerva il ſuo giogo orizzontale, cioè quando s' oſſerva la linguetta corriſpondere nel mezzo della trutina. E di più, quando nella bilancia s' oſſerva equilibrio, moſſa alquanto, da ſe ſi rimette a poco a poco col giogo in ſito orizzontale.

COROLLARIO I.

371. Dunque nella bilancia la linguetta ſerve per farci conoſcere l' equilibro; e 'l centro del moto è alquanto ſuperiore al ſuo centro di gravità (§305).

AVVERTIMENTO II.

372. Colla bilancia s' esplorano i pesi de' corpi a questo modo. Si mette prima il corpo, di cui si vuole esplorare il peso, in una scudella, e poscia si vanno mettendo nell' altra scudella de' pesi noti, finchè s'osserva esservi nella bilancia equilibrio. Quant' è il peso noto posto in una scudella, tanto si giudica essere il peso del corpo, che si vuole conoscere.

COROLLARIO II.

373. Due condizioni adunque deve avere una bilancia, acciò si possano con essa conoscere i veri pesi de' corpi. I. Deve osservarsi in essa un esatto equilibrio, quando è vuota. II. Debbono essere le lunghezze delle due braccia perfettamente uguali. E perciò è fallace una bilancia, se le due braccia non sono d'ugualissime lunghezze, ancorchè vi sia in lei equilibrio, quand' è vuota.

AVVERTIMENTO III.

374. Si noti che il fraudolento venditore, che fa uso d' una bilancia fallace, la quale s' osserva in equilibrio, quand' è vuota, mette, per ingannare a suo vantaggio, la merce sempre nella scudella pendente dal brac-

braccio più lungo, e 'l peso nell' altra scudella; perchè in tale modo merce di minor peso fa equilibrio con un contrappeso maggiore, e conseguentemente si dà dal venditore una merce per più di quello è in realtà. Però, consistendo la fallacia nella bilancia, e non ne' pesi, è facile ad essere sì fatta fallacia conosciuta, con far mettere la merce nella scudella, ove prima era il peso, e 'l peso in quella, ove prima era la merce; perchè con tale permutazione non si può osservare più equilibrio nella bilancia: anzi, se il venditore vuole occultare il suo inganno, aggiugnendo allora alla merce il di più, che si richiede per vedersi la bilancia in equilibrio, è costretto dare per meno una merce di peso maggiore.

PROBL. XIV.

375. *Conoscere con una bilancia fallace il vero peso d' una merce.*

Soluzione.

Sia DAFBE una bilancia fallace.

1 Si metta la merce nella scudella D, e s'esplori con qual peso, posto nella scudella E, fa equilibrio; e si chiami P sì fatto peso.

2. Si metta la merce in E, e s'esplori di nuovo con quale altro peso, posto in D, fa

fa equilibrio; e si chiami Q tale altro peso.

3. Si moltiplichino i due pesi P, e Q, e dal prodotto s'estragga la radice quadrata. Darà sì fatta radice il vero peso della merce.

DIMOSTRAZIONE.

Si chiami X il vero peso della merce. Saranno

$$P : X = AC : CB$$
$$X : Q = AC : CB.$$

Dunque sarà $P : X = X : Q$; e perciò $X^2 = P \times Q$, e $X = \sqrt{P \times Q}$. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

376. Si noti che non è da confondere l'esattezza d'una bilancia colla sua delicatezza, o sensibilità. Si dice sensibilissima una bilancia, quando si perde l'equilibrio in lei per ogni piccolissimo peso aggiunto a una della sue scudelle; e si dice altresì una bilancia più, o meno sensibile, secondochè di minore, o di maggior peso ha bisogno per interrompere il suo equilibrio. Tutte le bilancie hanno qualche grado d'insensibilità, perchè tutte sono soggette alla resistenza, che deriva dall'inevitabile stropic-

cia-

ciamento delle trutine cogli aſſi, che congiungono le iſteſſe trutine co'gioghi; e perciò ſecondo varia in eſſe la detta reſiſtenza, così varia ancora il grado della loro ſenſibilità. Contribuiſce alla ſenſibilità maggiore, o minore d'una bilancia la lunghezza maggiore, o minore delle ſue braccia. Se due bilancie hanno pari tutte le circoſtanze, però una ha le braccia due volte più lunghe dell'altra, l'una deve eſſere ancora due volte più ſenſibile dell'altra. Perchè, ſe un grano di peſo nella prima interrompe col ſuo momento l'equilibrio, ve ne biſognano due nell'altra per interrompere l'equilibrio ſuo; eſſendo il momento d'un grano a doppia diſtanza dal centro del moto uguale al momento di due grana a diſtanza ſemplice. Contribuiſce anche alla ſenſibilità maggiore, o minore d'una bilancia l'eſſere il centro di moto più, o meno vicino al centro di gravità del giogo. Se in una bilancia la diſtanza de'detti centri è $\frac{1}{24}$ d'oncia, e un grano di peſo fa muovere la punta della linguetta per un grado dal ſito verticale, fa muovere anche il centro di gravità del giogo per un grado del cerchio deſcritto col raggio di $\frac{1}{24}$ d'oncia; e perciò ſolleva il detto centro di gravità per l'altezza del ſeno verſo del medeſimo archetto; ſe poi la detta diſtanza è $\frac{1}{12}$ d'oncia, un grano di peſo non può giugnere a ſollevare allora il centro di gravità all'altezza maggiore del ſeno

seno verso dell' archetto d' un grado descritto col raggio di $\frac{1}{12}$ d' oncia, e conseguentemente non può giugnere a produrre nella bilancia l' istesso moto di prima. Per avere dunque una bilancia assai sensibile, è necessario 1. che sia in essa la resistenza derivante dallo stropicciamento quanto più è possibile picciola; 2 che sieno le braccia della massima possibile lunghezza; 3 che sia il centro del moto quanto più è possibile vicino al centro di gravità del giogo. Nelle bilancie pesanti, e che s'adoperano a pesare corpi di pesi considerabili, non è da sperare molta sensibilità; si può sperare gran sensibilità nelle bilancie delicate, e di picciolissimo peso: e pure in queste la sensibilità, che mostrano, quando sono vuote, non la conservano, quando sono gravate di pesi: anzi a misura che più s' accrescono i pesi in esse, si scema la loro sensibilità; perchè la resistenza derivante dallo stropicciamento nell' istessa ragione s' accresce, come si dirà a suo luogo.

AVVERTIMENTO II.

377. Si noti che la *Stadera* sarebbe nell' uso della vita civile più comoda della bilancia, perchè in essa con un contrappeso, o sia romano si può esplorare una moltitudine di pesi diversi, se non fosse uno strumento facile a divenire fallace nelle mani

de'

de' fraudolenti venditori, senza poterla conoscere nel tempo, che si commette. Si costruisce la stadera in due modi. I. Se si fa il braccio BC, che mantenghi in equilibrio il braccio CA colla scudella D; allora, volendo fare per esempio la divisione delle libbre, si metta prima nella scudella il peso d'una libbra; e, applicato al braccio BC il romano O, che si stima conveniente, si cerchi il punto F, in cui fa egli equilibrio col peso d'una libbra nella scudella, e si segni sì fatto punto con segno durevole. Poscia si segue a dividere il restante del braccio BC con altri segni simili, distante l'uno dall'altro, quant' è la distanza del segno F dal centro del moto. S'avrà in tale modo eseguita la divisione cercata delle libbre; perchè il romano posto nel primo, secondo, terzo, ec. segno deve col suo momento equilibrare il peso di una, di due, di tre libbre, ec. poste nella scudella D. II. Se si fa poi il braccio BC, che non sia in equilibrio col braccio AC, una colla scudella D; allora come si determina il primo segno F, con mettere nella scudella una libbra, si determina ancora il secondo, con mettere nella scudella due libbre, si determina il terzo, con mettere nella scudella tre lib., e così procedendo innanzi; e in tale altro modo si ha pure la divisione cercata. Intanto in ambe le costruzioni della stadera, come la divisione fatta in essa è relativamente

Fig. 58.

te

te alla scudella, alle cordelle, o catene, al giogo, e al romano adoperato nella custruzione; così una di tali cose, che si altera, il che non si può conoscere, si rende tosto fallace la stadera; e 'l venditore la rende fallace sempre a suo vantaggio, o con applicarvi una scudella più pesante, o col rendere il braccio BC più leggiero, limandolo nell' estremo B, o col rendere più leggiero il romano. Quindi è che la stadera dovrebbe bandirsi dall' uso della vita civile, e appena dovrebbe tolerarsi nel pesare paglia, carboni, e cose simili; per le quali cose è men curabile il danno, che arreca la frode, che la perdita del tempo, che si richiede per evitarla.

Della Carrucola.

DEFINIZIONE.

378. Si chiama *Carrucola* lo strumento di legno, o di metallo, nel quale v'è una girella scanalata, a cui s'adatta fune per tirare pesi. La carrucola poi si dice *Stabile*, se rimane sempre nell' istesso luogo, e *Mobile*, se va col peso, che si trasporta.

TEOR.

TEOR. II.

379. *In ogni carrucola ſtabile v' è equilibrio tra la potenza, e la reſiſtenza, ſe ſono tra loro uguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia ABC una carrucola ſtabile, per la cui ſcanalatura paſſi la fune PABR, coll' ajuto della quale la potenza applicata in P per la direzione AP mantenghi in equilibrio la reſiſtenza R. Eſſendo ABC un cerchio, che ha il centro in O, ed eſſendo AP, BR tangenti di tale cerchio in A, e B; ſuppoſto tirati i raggi OA, OB, ſaranno OA, OB riſpettivamente perpendicolari ad AP, BR. Facendo dunque la potenza, e la reſiſtenza azioni, come ſe foſſero in A, e B, ſaranno tra loro nella ragione di BO : OA (§ 284), e perciò uguali tra loro. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare. Fig. 59.

AVVERTIMENTO.

380. Ancorchè colla carrucola ſtabile non ſi abbia riſparmio di forza: nondimeno ſi hanno due vantaggi importantiſſimi. I. Quando ſi tratta di tirare in alto un peſo, un uomo ſenza l' ajuto della currucola deve adoperare una forza conveniente ad innal-

nalzare e 'l peso, e le braccia istesse; laddove colla carrucola deve impiegare una forza conveniente ad innalzare il solo peso, diminuito di tanto, quant' è lo sforzo del peso delle medesime braccia. II. Coll' ajuto d'una carrucola stabile si muta la direzione d' una forza; il che giova assaissimo alle volte per la sicurezza di coloro, che innalzano de' pesi, alle volte per obbligare una potenza, che non può fare azione, se non per una determinata direzione, a fare azione per un' altra direzione, e alle volte finalmente per cambiare una direzione svantaggiosa a una potenza in un' altra vantaggiosa.

TEOR. III.

381. *In ogni carrucola mobile la potenza è in equilibrio colla resistenza, se quella è a questa, come il raggio della girella alla retta, che congiugne i due punti de' contatti della girella colla fune.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig.60. Sia ABC una carrucola mobile ligata alla resistenza R; sia la fune DAEBP ligata in D; e finalmente sia la potenza applicata in P per la direzione PB, che mantenghi in equilibrio la resistenza R. S' intendano le direzioni DA, PB prolungate, finchè s'uni-

s' unifcano in F ; farà il punto F nella direzione della refiftenza R , che deve dividere l'arco AB in due parti uguali . S'intendano di più tirati i raggi della girella, congiunta la retta AB, e da A calata AH perpendicolare alla direzione della potenza. Dividerà OF gli angoli AOB, AFB in due parti uguali. Or sforzandofi la potenza in P, che mantiene in equilibrio la refiftenza R , di muovere la girella intorno al punto A, farà A il centro del moto della macchina in tale cafo. E perciò la potenza farà in equilibrio colla refiftenza ; fe faranno tra loro nella ragione di AG : AH (§284), o, effendo l'angolo ABH = AOG , e confeguentemente il triangolo AOG fimile ad ABH , nella ragione di AO : AB. Ch'è ciò, che bifognava dimoftrare.

COROLLARIO.

382. Se l'arco AEB è la mezza periferia; allora AB è il diametro della girella, e confeguentemente il doppio di AO, e le funi AD, BP fono parallele. Se poi l'arco AEB è minore , o maggiore della mezza periferia , ma maggiore di 60° , o minore di gr. 300 ; è AB maggiore in tale cafo di AO , ma minore del doppio . Se di più l'arco AEB è di gr. 60, o di gr. 300; allora è AB = AO. Se finalmente l'arco AEB

è minore di gr. 60, o maggiore di gr. 300; in tale altro caso è AB minore di AO. Dunque nel caso dell' equilibrio tra la potenza, e la resistenza nella carrucola mobile, se le funi AD, BP sono parallele, la potenza è la metà della resistenza. Se le funi non sono parallele, e l'arco AEB è maggiore di 60°, o minore di 300°, la potenza è maggiore della metà della resistenza. Se poi l'arco AEB è di 60°, o di gr. 300, la potenza uguaglia la resistenza. Se finalmente l'arco AEB è minore di 60°, o maggiore di gr. 300, la potenza è maggiore della resistenza. Per la qual cosa nella carrucola mobile, acciò la potenza equilibri la resistenza col massimo vantaggio, è necessario che le funi sieno parallele.

AVVERTIMENTO.

383. Si noti che, trattandosi di carrucola mobile, alla resistenza si debbono sempre aggiugnere i pesi dell'istessa carrucola, e della fune; perchè debbono essere anch'essi sostenuti dalla potenza.

Dell'

Dell' Asse nella ruota.

DEFINIZIONE.

384. Si chiama *Asse nella ruota* il cilindro AB anneſſo alla ruota CD di maggiore diametro, e mobile intorno all' aſſe EF, col quale appoggia ogni coſa agli due ſoſtegni H, e I. Fig.61.

AVVERTIMENTO.

385. S' applicano in queſta macchina la potenza alla periferia della ruota, e la reſiſtenza con una fune al cilindro; tal che girandoſi la ruota dalla potenza, la fune ſi ravvolge intorno al cilindro, e così viene moſſa la reſiſtenza.

TEOR. IV.

386. *In ogni aſſe nella ruota la potenza è in equilibrio colla reſiſtenza, ſe ſono tra loro come la ſomma de' raggi del cilindro, e della fune, con cui la reſiſtenza è applicata al cilindro, alla perpendicolare calata ſulla direzione della potenza dal centro della ruota.*

DIMOSTRAZIONE.

Sia la potenza applicata al punto C, che si sforza di muovere per qualunque direzione CS la ruota CD, e sia R la resistenza applicata al cilindro con una fune. S' intendano dal centro O della ruota tirate la retta OC, raggio dell'istessa ruota, e la retta ON perpendicolare a CS. S' intenda di più, preso in CS qualunque punto L, formato il rettangolo LMCK; sarà CK tangente della ruota in C. Esprimendo la potenza con CL, equivalerà ella alle forze, delle quali CK, CM esprimono le direzioni, ed efficacie. Di tali forze quella sola, la cui direzione, ed efficacia è espressa da CK, può sforzare la ruota a girare. Chiamando dunqne P l' intera potenza applicata al punto C della ruota per la direzione CS, e Q la sua porzione, che sforza la ruota a girare; sarà P : Q = CL : CK = CL : LM = OC : ON. In oltre la forza Q sforza in C la ruota a girare intorno al punto O. Dunque la sua distanza dal centro del moto è OC. Similmente la resistenza R fa azione contro del cilindro, che la potenza si sforza di far girare colla ruota intorno al suo asse, come se fosse nel punto G dell' asse della fune; onde la distanza di tale resistenza dal centro del moto è la somma de' raggi del cilindro, e della fune.

Sic-

Sicchè nel caso dell' equilibrio, chiamando r la somma de' detti raggi, sarà $Q : R = r : OC$ (284). Essendo dunque nel caso dell' equilibrio

$$P : Q = OC : ON$$
$$Q : R = r : OC;$$

sarà $P : R = r : ON$. Sicchè la potenza, e la resistenza sono in equilibrio, se sono tra loro come la somma de' raggi del cilindro, e della fune alla distanza della direzione della potenza dal centro della ruota. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

387. Quindi in ogni asse nella ruota la potenza, che fa equilibrio colla resistenza, sarà la minima possibile, quando la distanza della sua direzione dal centro della ruota sarà la massima; cioè quando sarà l' istesso raggio della ruota, e conseguentemente la direzione della potenza sarà tangente della ruota. Sicchè s' applica la potenza all' asse nella ruota col massimo vantaggio, facendola agire per direzione, che sia tangente della ruota; e in tal modo supporremo sempre appresso applicata a tale macchina la potenza.

COROLLARIO II.

388. In oltre, se il raggio della fune sarà insensibile per rispetto del raggio del cilindro; nel caso dell' equilibrio sarà allora la potenza, applicata col massimo vantaggio, alla resistenza, come il raggio del cilindro al raggio della ruota. Quindi delle quattro grandezze potenza, resistenza, raggio dell' asse, e raggio della ruota, datene tre, è sempre determinabile la quarta.

AVVERTIMENTO.

389. Questa macchina si usa sotto varie forme. Talvolta ha de' bastoncini di legno, che sporgono in fuori dalla periferia della ruota, per potervi comodamente applicare le mani. Talvolta ha una ruota grande, e larga con traverse al di dentro, acciò uomini, con andarsi rampicando al di dentro intorno la superficie, possano col loro peso muoverla. Talvolta in vece di ruota ha più leve conficcate nel cilindro in forma di raggi della medesima ruota. Talvolta ha negli estremi dell' asse de' manubrj, che fanno gli uffizj della ruota. Talvolta finalmente ha l' asse verticale, e in vece della ruota ha una lunga leva conficcata nel cilindro, che si conduce in giro, quando la macchina viene mossa, o da uomini, o da qualche bruto.

Del

Del Piano inclinato.

TEOR. V.

390. *Contrassegnino AB qualunque piano inclinato, CB il piano orizzontale, e AC l'altezza di tale piano inclinato; e sia il corpo, il cui centro di gravità è O, mantenuto in equilibrio sul detto piano inclinato dalla potenza P per qualunque direzione PO. Dico, supposta PO prolungata in F, essere la potenza P al peso del corpo, come il seno dell' angolo in B al coseno dell' angolo in F.* Fig. 62.

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda per O tirata OD parallela ad AB, e s' intenda formato il rettangolo DE. Esprimendo l' intera potenza P con PO, equivalerà ella alle due forze, l' efficacie, e direzioni delle quali vengono espresse da DO, OE (§ *69*). Or di queste due forze la espressa da DO sola può impedire la discesa del corpo pel piano inclinato; e perciò la forza espressa da DO deve uguagliare la gravità rispettiva del corpo su AB. Sicchè, chiamando G la gravità assoluta del corpo,

g la gravità rispettiva, e R il seno massimo, s'avranno le seguenti proporzioni

$$P : g = PO : OD = R : cosen.\ POD$$
$$= R : cosen.\ F$$
$$g : G = \quad = sen.\ B : R.$$

Dunque $P : G = sen.\ B : cosen.\ F$. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

391. Perchè quant'è più picciolo l'angolo in F, tanto più grande diventa il suo coseno; perciò quanto più picciolo è l'angolo in F, tanto più la potenza P si fa minore per rispetto del peso da sostenere sul piano inclinato. Onde la potenza P diverrà la minima, quando il coseno dell'angolo in F diverrà il massimo, cioè diverrà uguale al seno massimo; il che accade, quando l'angolo in F diventa nullo, e conseguentemente quando PO si fa parallela ad AB. Sicchè, trattandosi di mantenere in equilibrio un corpo su di qualsisia piano inclinato, la potenza si applica col massimo vantaggio, se la sua direzione è parallela alla direzione dell'istesso piano; e in tale caso la potenza è tanto minore per rispetto del peso, quant'è il seno di B minore per rispetto del seno massimo, ovvero quant'è AC minore per rispetto di AB.

CO-

COROLLARIO II.

392. Se PO è parallela a BC; allora il punto F cade per rispetto del corpo dall'altra parte, e l'angolo in F si fa uguale all'angolo in B. Sicchè in tale caso la potenza sta al peso, come *sen.* B : *cosen.* B, o come AC : CB.

Del Cuneo.

DEFINIZIONE I.

393. Si dice *Cuneo* un prisma triangolare ABCDFE di legno, o di ferro, che ha i due triangoli ABC, DFE isosceli. Fig. 63.

DEFINIZIONE II.

394. Del cuneo si dicono la retta BF il *taglio*, il parallelogrammo ACDE la *base*, la retta AC, o DE la *larghezza*, e *altezza* l'altezza BG, o FH del triangolo ABC, o del triangolo EFD.

AV-

AVVERTIMENTO.

395. S' adopera il cuneo per separare le parti de' corpi, ne' quali s' intromette col suo taglio, percuotendolo nella sua base.

TEOR. VI.

396. Sia da introdursi il cuneo ABCDFE nel corpo PQ fino al piano LMNO parallelo alla base ACDE. Dico che la potenza applicata sulla base ACDE farà equilibrio colla resistenza, o sia colla forza di coesione, colla quale si tengono insieme le parti, che si debbono separare, se l' una sarà all' altra nella ragione dell' arco circolare descritto col raggio BG, e che misura l' angolo ABG, all' istesso raggio BG.

DIMOSTRAZIONE.

Dovendosi introdurre il cuneo fino al piano LMNO, si debbono separare dal loro scambievole contatto tutte le parti di materia, che si toccano nel piano IBFK, e che appartengono metà alla porzione, ch' è a destra di tale piano, e metà alla porzione, ch' è a sinistra; e si deve vincere di tali parti la forza di coesione, equabilmente distribuita per l' estensione del detto

to piano IBFK. Or se si suppone il corpo già diviso nella sezione IBFK, senza che una parte sia allontanata dall'altra; e si suppone in oltre la parte, ch'è a destra di tale piano premuta contro l'altra da un peso equivalente alla detta forza di coesione, e premuta come se tutta la gravità facesse azione nel centro di gravità del piano IBFK, l'istessa potenza si richiederebbe per introdurre il cuneo tra le due dette parti fino alla sezione LMNO. Ma coll'introdurre il cuneo fino alla detta sezione nel supposto caso, la potenza deve correre uno spazio uguale ad IB, e 'l peso deve nel medesimo tempo correre uno spazio uguale all'arco circolare, che descrive il centro di gravità del rettangolo BMNF, separandosi dal suo uguale LBFO; o sia l'arco circolare descritto colla metà di BI, e che misura l'angolo LBM, ovvero l'arco circolare descritto col raggio BI, e che misura l'angolo LBI. Dunque, se la potenza sta al detto peso, come il detto arco circolare a BI, il moto della potenza uguaglia quello del detto peso (§ 53); e perciò, essendo i moti nella ragione de' momenti (§287), il momento della potenza uguaglia quello del detto peso, o sia della detta forza di coesione, e conseguentemente la potenza è in equilibrio colla resistenza (§283). Per la qual cosa la potenza nel cuneo è in equilibrio colla resistenza, se l'una è all'altra, come l'aco

l'arco circolare descritto col raggio BI, e che misura l'angolo LBI, al raggio BI, o come l'arco circolare descritto col raggio BG, e che misura l'angolo ABG all'istesso raggio BG. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

397. Se l'angolo ABC sarà assai picciolo, e molto più picciolo la sua metà ABG; in vece dell'arco circolare descritto col raggio BG, e che misura l'angolo ABG, si potrà senza errore sensibile prendere la sua tangente AG. Onde in tale caso vi sarà equilibrio nel cuneo tra la potenza, e la resistenza, se l'una sarà all'altra, come la metà della larghezza AC alla sua altezza BG. E perciò quanto più picciola sarà la larghezza per rispetto dell'altezza, tanto meno sarà la potenza per rispetto della resistenza.

Della Vite.

DEFINIZIONE.

398. Si dicono *Vite* un cilindro solido

do di legno, o di metallo, che ha nella sua superficie alcune spire rilevate in fuori, e *Madrevite* un pezzo con un foro cilindrico, nella cui superficie sono incavate pure alcune spire.

AVVERTIMENTO.

399. Sempre che s' adopera la vite, deve ella essere inserita nella madrevite; onde le spire rilevate dell' una debbono adattarsi alle spire incavate dell'altra.

TEOR. VII.

400. *Sia la vite AB inserita nella madrevite, ch' è nel pezzo CD. Sia di più all' estremo B della vite ligato il cannone EF. E sia finalmente alla testa A della vite applicata la leva PO. Dico che vi sarà equilibrio trà la potenza applicata in P, e che spinge la leva per far girare la vite, e la resistenza EF, se l'una starà all'altra, come una porzione del lato del cilindro, che tramezza tra due spire contigue della vite, alla periferia del cerchio descritto col raggio OP.* Fig64.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè se la potenza applicata in P gira una volta la leva PO, una volta si gi-

gira anche la vite AB, e'l peso EF si muove intanto per quant'è la porzione del lato del cilindro, che tramezza tra due spire contigue. Dunque la velocità della potenza sta a quella della resistenza, come la periferia del cerchio descritto col raggio OP alla porzione del lato dèl cilindro, che tramezza tra due spire contigue della vite AB. Onde, se la potenza sta alla resistenza, come la detta porzione del lato del cilindro alla detta periferia, il moto della potenza uguaglia quello della resistenza (§ 53); e perciò, essendo i moti nella ragione de' momenti (§ 287), il momento della potenza uguaglia quello della resistenza, e conseguentemente la potenza è in equilibrio colla resistenza (§ 283). Per la qual cosa nella vite la potenza è in equilibrio colla resistenza, se sono tra loro nella ragione della porzione del lato del cilindro, che tramezza tra due spire, alla periferia del cerchio descritto col raggio OP. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

401. Quindi quanto meno è l'intervallo delle spire, e più lunga è la leva OP, tanto meno deve essere la potenza per rispetto della resistenza.

AV.

Avvertimento.

402. Della vite si fa uso per sollevare de' pesi non solamente coll' estremo inferiore, ma anche coll' estremo superiore. Geremia Lersoni coll' ajuto di molte viti innalzò per più palmi sopra terra il campanile della Chiesa di S. Lorenzo di Rotterdam, e, rifatti i fondamenti, lo fe diritto scendere, e poggiare su di essi. Si fa uso grandissimo della vite anche per strignere, premere, o calcare corpi, come s' osserva nelle morse de' fabbri, e nelle viti, che s'adoperano nelle carozze, e in tutt' i torchi.

C A P. IV.

Delle Macchine composte.

Theor. VIII.

403. *Sia nella macchina composta, che rappresenta la fig. 65, P la potenza, e R la resistenza. Dico che vi sarà tra P e R equilibrio in tale macchina, se sarà* $P : R = BG \times DH \times FI ; AG \times CH \times EI$. Fig. 65.

Spie.

Spiegazione della Macchina.

Costa tale macchina di tre leve AB, CD, EF poggiate agli tre sostegni K, L, M, e mobili intorno a' punti G, H, I; e sono di più tali leve disposte in modo, che, coll' essere inclinata la prima dalla destra, si debbono dalla destra innalzare la seconda, e la terza innalzare dalla sinistra.

DIMOSTRAZIONE.

Si chiami T la forza da applicarsi in E per equilibrare colla leva EF la resistenza R; sarà T la forza, da cui sarà spinta la leva DC in D. Similmente si chiami S la forza da applicarsi in C per equilibrare colla leva CD la forza T in D; sarà S la forza, da cui sarà spinta la leva AB in B. Dunque per darsi equilibrio tra P e R, deve P colla leva AB equilibrare la forza S in B. E perciò, essendo la ragione di P : R composta dalle ragioni di P : S, di S : T, e di T : R, sarà nel caso dell' equilibrio la ragione di P: R composta dalle ragioni di BG : GA, di DH : HC, e di FI : IE, e conseguentemente come BG $\times$ DH $\times$ FI : AG $\times$ CH $\times$ EI. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

CO-

COROLLARIO.

404. Quindi, se ciascuna delle lunghezze AG, CH, EI è di 6 pal., e ciascuna delle lunghezze BG, DH, FI è d' un palmo, farà P equilibrio con R, se sarà $P : R = 1 \times 1 \times 1 : 6 \times 6 \times 6 = 1 : 216$; vale a dire che una potenza d' un rotolo fa equilibrio in tale caso con una resistenza di 2 cantaja, e 16 rotola.

AVVERTIMENTO.

405. Ciò, che s'è dimostrato di questa macchina, si può applicare ad ogni altra composta da 5, 7, 9, ec. leve.

TEOR. IX.

406. *Sieno nelle macchine composte, che rappresentano le fig. 66, 67, 68, e 69, P la potenza, e R la resistenza. Dico che vi sarà tra P e R equilibrio in ognuna di tali macchine, se sarà P : R, come l' unità al numero di tutt' i tratti della fune, che gira per l' istessa macchina, eccettuatone quello, a cui è applicata la potenza.* Fig. 66, 67, 68, e 69

Spiegazione delle Macchine.

Costano sì fatte macchine di carrucole insieme combinate. Le superiori sono stabili, le inferiori sono mobili; e di più la fune, che passa per le scanalature di tutte le girelle, è con un estremo raccomandato alla cassa delle girelle mobili, se il numero di tutte le girelle è dispari, e alla cassa delle girelle stabili, se il numero di tutte le girelle è pari.

DIMOSTRAZIONE.

In qualsisia delle dette macchine non può la potenza P essere in equilibrio colla resistenza R, se non sono tutti i tratti della fune, che gira per la medesima macchina, ugualmente stirati, e conseguentemente tirati da forze uguali. Ma di sì fatti tratti di fune uno solo è tirato dalla potenza, e tutti gli altri vengono tirati dalla resistenza. Dunque ognuno de' tratti di fune tirati dalla resistenza sostiene dell' istessa resistenza la parte denominata dal loro numero, e conseguentemente all' istessa parte della resistenza è uguale la potenza. Sicchè la ragione della potenza P alla resistenza R, qualora sono in equilibrio in ognuna delle dette macchine, è uguale alla ragione dell' unità al numero de' tratti della fune, che gira

gira per l'istessa macchina, esclusone quello, a cui è applicata la potenza. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

407. Quindi la potenza è in equilibrio colla resistenza, se l'una è all'altra, come 1 : 3 nel caso della fig. *66*, come 1 : 4 nel caso della fig. *67*, come 1 : 5 nel caso della fig. *68*, e come 1 : *6* nel caso della fig. *69*.

COROLLARIO II.

408. Essendo il numero de' tratti della fune, esclusone quello, a cui è applicata la potenza, uguale sempre al numero di tutte le girelle; sarà la potenza in equilibrio colla resistenza, se l'una sarà all'altra, come l'unità al numero di tutte le girelle.

AVVERTIMENTO I.

409. Si noti che nelle macchine composte da carrucole per resistenza si deve intendere non solamente il peso da muovere, ma il peso anche delle carrucole mobili. E si noti altresì che quando si tratta di dover adoperare molte girelle, per diminuire l'estensione della macchina, s'adoperano, facendone più girare intorno a un comune asse,

come apparisce dalla fig. 70.

AVVERTIMENTO II.

410. Si noti ancora che se le carrucole sono disposte, come appariscono nella Fig. 71. fig. 71, in cui la sola D è stabile: allora, perchè la forza, che si richiede in EF per equilibrare la resistenza R colla carrucola A, è l' istessa che quella, che tira la carrucola B; similmente la forza, che si richiede in GH per equilibrare quella, che tira la carrucola B, è l'istessa che quella, che tira la carrucola C; e finalmente la forza, che si richiede in IK per equilibrare quella, che tira la carrucola C, è l' istessa che la potenza P, che deve equilibrare R con tutte le carrucole: sarà, chiamando X, e Y le forze, che tirano le carrucole C, e B, nel caso dell'equilibrio la ragione di P: R, come composta dalle ragioni di P: X, di X: Y, e di Y: R, composta anche dalle ragioni del raggio della carrucola C alla corda dell' arco, che abbraccia la fune NHK, del raggio della carrucola B alla corda dell' arco, che abbraccia la fune MFH, e del raggio della carrucola A alla corda dell' arco, che abbraccia la fune LQF (§ 381). E perciò, se le funi sono tutte parallele, nel qual caso le corde de' detti archi divengono diametri delle girelle, la ragione di P: R, qualora v' è equilibrio tra loro, si fa

sa duplicata, triplicata, quadruplicata, ec. di quella di 1 : 2, secondochè le carrucole mobili sono 2, 3, 4, ec.

TEOR. X.

411. *Sieno nella macchina composta, che rappresenta la fig. 72, P la potenza, e R la resistenza. Dico essere P in equilibrio con R, se sta P : R, come il prodotto de' raggi delle picciole ruote C, E, G, e del raggio del cilindro K, accresciuto di quello della fune, al prodotto de' raggi delle ruote maggiori D, F, H, e della lunghezza AB del manico.* Fig. 72.

Spiegazione della Macchina.

Costa sì fatta macchina di quattro assi nelle ruote, e le ruote sono guarnite di denti, acciò l'una possa muovere l' altra. La potenza, applicata all' estremo del manico AB, col girare l' istesso manico, fa girare il primo asse, e con lei la picciola ruota C; la picciola ruota C fa girare l' altra maggiore D, e con lei il suo asse, e la picciola ruota E; la picciola ruota E fa girare la ruota maggiore F, e con lei il suo asse, e la picciola ruota G; e finalmente la picciola ruota G fa girare la ruota maggiore H, e con lei il suo asse, e 'l cilindro K, al quale s' avvolge la fune, che tira la resistenza R.

DIMOSTRAZIONE.

Si chiami N la forza da applicarsi alla periferia della ruota H per equilibrare coll' ultimo asse nella ruota la resistenza R; sarà N la resistenza, che s' avrà nella periferia della picciola ruota G. Similmente si chiami M la forza da applicarsi alla periferia della ruota F per equilibrare la resistenza N nella periferia della picciola ruota G; sarà M la resistenza, che s' avrà nella periferia della picciola ruota E. Si chiami di più L la forza da applicarsi alla periferia della ruota D per equilibrare la resistenza M alla periferia della picciola ruota E; sarà L la resistenza, che s' avrà nella periferia della picciola ruota C. Sicchè, per darsi equilibrio tra P, e R, la potenza P deve equilibrare la potenza L nella periferia della picciola ruota C. E perciò, essendo la ragione di P : R composta dalle ragioni di P : L, di L : M, di M : N, e di N : R, sarà nel caso dell' equilibrio la ragione di P : R composta dalle ragioni del raggio di C alla lunghezza AB, del raggio di E al raggio di D, del raggio di G al raggio di F, e del raggio del cilindro K, accresciuto di quello della fune, al raggio di H, vale a dire uguale alla ragione del prodotto de' raggi delle picciole ruote C, E, G, e del raggio del cilindro K, accresciuto di quello del-

della fune, al prodotto de' raggi delle ruote maggiori D, F, H, e della lunghezza AB del manico. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

412. Quindi in questa macchina quanto più sono piccioli i raggi delle ruote minori, e 'l raggio del cilindro K per rispetto de' raggi delle ruote maggiori, e della lunghezza AB del manico, tanto meno deve essere la potenza P per rispetto della resistenza R, per essere tra loro in equilibrio.

COROLLARIO II.

413. Dovendosi in oltre in tale macchina dalle ruote minori C, E, G muovere le maggiori D, F, H coll'ajuto de' loro denti; saranno i denti, e i loro intervalli di ciascuna ruota minore uguali agli denti, e agl' intervalli della ruota maggiore corrispondente. Sicchè i numeri de'denti sì delle ruote C, e D, che delle due E ed F, come anche delle due G e H sono proporzionali alle loro periferie, e conseguentemente agli loro raggi. E perciò, movendosi la macchina, il numero delle rivoluzioni, che farà il primo asse, e conseguentemente la potenza P, starà al numero di quelle, che farà nel medesimo tempo il secondo asse,

come il raggio di D al raggio di C. Similmente il numero delle rivoluzioni, che farà il secondo asse, starà al numero di quelle, che farà nel medesimo tempo il terzo, come il raggio di F al raggio di E; e così ancora il numero delle rivoluzioni, che farà il terzo asse, starà al numero di quelle, che nell' istesso tempo farà il quarto, come il raggio di H al raggio di G.

COROLLARIO III.

414. Quindi, movendosi la macchina, il numero delle rivoluzioni, che farà la potenza applicata in A, sarà al numero di quelle, che nell'istesso tempo farà il cilindro K, in ragione composta dalla ragioni del raggio di D al raggio di C, del raggio di F al raggio di E, e del raggio di H al raggio di G, e conseguentemente come il prodotto de' raggi delle ruote maggiori D, F, H al prodotto de' raggi delle ruote minori C, E, G.

COROLLARIO IV.

415. E' di più, quando la macchina si muove, la velocità della potenza a quella della resistenza in ragione composta dalla ragione della periferia del cerchio, che decrive BA, alla periferia del cerchio, che ha per raggio il raggio del cilidro K, accresciuto di quello della fune,

fune, e dalla ragione del numero delle rivoluzioni, che fa la potenza, al numero di quelle, che fa nell' istesso tempo il cilindro K. Dunque, quando la macchina si muove, la velocità della potenza è a quella della resistenza, come il prodotto di AB, e de' raggi delle ruote D, F, H al prodotto del raggio del cilindro K, accresciuto di quello della fune, e de' raggi delle ruote C, E, G, e conseguentemente come la resistenza R alla potenza equilibrante P. Sicchè, se la potenza equilibrante in tale macchina è 1000 volte minore della resistenza R, quando si muove, la resistenza va 1000 volte men veloce della potenza; onde non può quella correre un palmo, se questa non ne corre 1000. Per la qual cosa col risparmio della forza va combinato, come in ogni altra macchina, il consumo del tempo.

AVVERTIMENTO I.

416. Ciò, che s'è detto di questa macchina, ha luogo, quando le ruote minori C, E, G muovono le maggiori D, F, H. Il contrario poi accade, quando le ruote maggiori muovono le minori, come nella macchina, che rappresenta la figura 73, nella quale la potenza applicata in A gira la leva AB, e gira per conseguenza l'asse CD, e con lei la ruota E, questa ruota E gira il fuso F, e con

Fig. 73.

e con esso l'asse IK, e la ruota G, la ruota G gira l'altro fuso H, e con esso l'asse LM, e la ruota N; e finalmente la ruota N gira il fuso O, e con esso l'asse PQ, e la mola Q. Or se ognuna delle ruote E, G, N ha 100 denti, e ognuno de' fusi F, H, O ha 10 bastoni, in una rivoluzione della potenza se ne faranno dal fuso F 10, dal fuso H 100, e dal fuso O 1000; e perciò intanto che la potenza fa una rivoluzione la mola Q ne fa 1000. Questa macchina serve per accrescere la velocità della resistenza, e non per risparmiare forza; anzi la forza equilibrante in tale macchina deve essere tanto maggiore della resistenza, quant'è la velocità di questa maggiore della velocità, colla quale si deve muovere la potenza, quando la macchina è in moto.

AVVERTIMENTO II.

417. Alle ruote dentate si rapporta la macchina di grandissimo uso nell'Artiglieria, detta il *Cric*. Rappresenta il Cric la figura 74, e in essa rappresentano AB una larga, e massiccia barra di ferro fatta a denti, e terminata in A in forma di mezza luna; C una ruota dentata, che nel suo asse porta la picciola ruota D anche dentata; E un'altra picciola ruota dentata, che nel suo asse porta il manico FGH. Ogni cosa va disposta in una cassa in modo, che girando il

Fig. 74.

il manico FGH, il quale ſporge fuori della caſſa, ſi gira la picciola ruota E, e queſta fa girare la ruota maggiore C; e con lei la ruota minore D, e la ruota minore D, girando, ſpinge in alto la barra AB, che ſporge alquanto fuori pure della caſſa dalla parte A, e colla barra AB il peſo, che vi poggia in A. In tale macchina la potenza va applicata in GH; e la reſiſtenza, ch'è il peſo della barra, una col peſo del corpo, che poggia ſulla barra in A, va applicata alla periferia della picciola ruota D. Sicchè vi ſarà equilibrio tra la potenza, e la reſiſtenza in tale macchina, ſe ſaranno tra loro nella ragione del prodotto de' raggi delle picciole ruote D, ed E al prodotto del raggio della ruota C, e della lunghezza FG del manico.

AVVERTIMENTO III.

418. Fin qui ſi ſono combinate inſieme più macchine ſemplici dell' iſteſſa ſpezie; procediamo ora a combinarne di quelle, che ſono di ſpezie diverſe.

TEOR. XI.

419. *Sieno nella macchina, che rapprenta la fig. 75, detta la* Capra, *P la potenza, e R la reſiſtenza. Dico eſſere P e R in equilibrio in tale macchina, ſe l'una è all' altra,* Fig. 75.

come

come il raggio del cilindro C, accresciuto di quello della fune, alla lunghezza della leva AB, moltiplicata pel numero di tutte le girelle.

Spiegazione della macchina.

In questa macchina sono DE, DF, DG tre robusti sostegni di legno congiunti in D, e poggiati co' loro piedi E, F, G sul suolo; è di più C un cilindro, pure di legno, conficcato ne' suoi estremi coll' asse ne' sostegni DF, DG, e mobile intorno all' istesso asse coll' ajuto della leva AB, che si conficca ne' diversi fori, che vi sono nel cilindro a tale uopo; finalmente H è una combinazione di carrucole sospese colla casa delle stabili all' anello, ch' è sotto la cima D. In sì fatta macchina la potenza P, applicata all' estremo A della leva AB, gira la leva, e per conseguenza il cilindro C, e la fune s' avvolge intorno al cilindro, e coll' avvolgersi la fune intorno al cilindro le carrucole mobili s' innalzano, e s' innalza per conseguenza la resistenza R.

DIMOSTRAZIONE.

Si chiami Q la forza da applicarsi al tratto IC della fune per equilibrare colle sole carrucole H la resistenza R: Sara Q la forza applicata al cilindro C, che la potenza P deve equilibrare coll' ajuto della leva AB, per

per equilibrare coll' intera macchina la resistenza R. Dunque, essendo la ragione di P: R composta dalla ragioni di P : Q, e di Q : R, nel caso dell' equilibrio sarà la ragione di P : R composta dalle ragioni del raggio del cilindro C, accresciuto di quello della fune, alla lunghezza AB (§ 384), e dell' unità al numero di tutte le girelle (§ 406), e conseguentemente uguale alla ragione del raggio del cilidro C, accresciuto di quello della fune, alla lunghezza della leva AB, moltiplicata pel numero di di tutte le girelle. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

TEOR. XII.

420. *Si abbia la resistenza R a tirare su pel piano inclinato LM coll' ajuto delle carrucole H, essendo le mobili colla loro cassa ligate alla resistenza R, e le stabili colla cassa loro ligate al corpo immobile D, e coll' ajuto dell' asse nella ruota C, avvolta al cilindro C l' estremo libero della fune, che gira per tutte le girelle. Dico che la potenza P, applicata all' estremo B della leva AB, sarà in tale macchina equilibrio colla resistenza R, se l' una sarà all' altra in ragione composta dalla ragione del raggio del cilindro C, accresciuto di quello della fune, alla lunghezza AB, dalla ragione dell' unità al numero di tutte le girelle, e dalla ragione del seno dell' angolo d' inclina-* Fig. 76.

na-

nazione del piano LM col piano orizzontale al coseno dell' angolo formato dalla direzione, per cui è tirata la resistenza, colla direzione del piano inclinato LM, o, se tali direzioni sono parallele, dalla ragione del detto seno al seno massimo.

DIMOSTRAZIONE.

Si chiamino Y la forza atta ad equilibrare sul piano inclinato LM la resistenza R per la direzione, per cui ella è tirata nella macchina, e X la forza atta ad equilibrare colle carrucole H la forza Y. Dunque, per darsi equilibrio tra P e R, deve la potenza P coll' ajuto della leva AB equilibrare la forza X applicata al cilindro C. E perciò, essendo la ragione di P : R composta dalle ragioni di P : X, di X : Y, e di Y : R, sarà nel caso dell' equilibrio la ragione di P : R composta dalle ragioni del raggio del cilindo C, accresciuto di quello della fune, alla lunghezza AB (§ 386), dell' unità al numero di tutte le girelle (§ 408), e del seno dell' angolo d'inclinazione del piano LM col piano orizzontale al coseno dell' angolo formato dalla direzione, per cui è tirata la resistenza, colla direzione del piano inclinato LM, o, se tali direzioni sono parallele, del detto seno al seno massimo (§ 390). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

TEOR.

TEOR. XIII.

421. *Sia nella macchina, che rappresenta* Fig.77. *la fig. 77, combinata la vite C colla ruota dentata D, tal che girando la potenza P, applicata al manico GHI, una volta il cilindro AB, la vite C prenda un solo dente di D. Dico che in tale macchina, detta* la Vite perpetua, *la potenza P è in equilibrio colla resistenza R, la quale col girare la ruota D, e conseguentemente il suo asse EF, viene mossa, se l'una è all'altra, come il raggio del cilindro EF, accresciuto di quello della fune, alla lunghezza GH del manico, moltiplicata pel numero de' denti della ruota D.*

DIMOSTRAZIONE.

Prendendo la vite C in ogni rivoluzione del cilindro AB un dente solo della ruota D; per girare una sola volta la ruota D, e conseguentemente il suo asse EF, deve il cilindro AB girare tante volte, quante volte il dinota il numero de' denti della ruota D. Dunque la velocità della resistenza R in tale macchina sta a quella della potenza P, come la periferia del cerchio, il cui raggio è il raggio del cilindro EF, accresciuto di quello della fune, alla periferia del cerchio descritto col raggio GH, moltiplicata pel numero de' denti della ruotà D, o co-

o come il raggio del cilindro EF, accresciuto di quello della fune, alla lunghezza GH del manico, moltiplicata pel numero de' denti della ruota D. Onde, se la potenza P sta alla resistenza R, come il raggio dell' asse EF, accresciuto di quello della fune, alla lunghezza GH del manico, moltiplicata pel numero de' denti della ruota D; il moto della potenza uguaglia quello della resistenza (§ 53); e perciò, essendo i moti nella ragione de' momenti (§ 287), il momento della potenza uguaglia quello della resistenza, e conseguentemente la potenza è in equilibrio colla resistenza (§ 283). Per la qual cosa nella vite perpetua la potenza è in equilibrio colla resistenza, se l'una è all' altra, come il raggio dell'asse EF, accresciuto di quello della fune, alla lunghezza GH del manico, moltiplicata pel numero de' denti della ruota D. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

432. In questa insigne macchina, dovuta all' immortale Archimede, v'è un risparmio grandissimo di forza, e maggiore diviene tale risparmio, se se ne combinano due insieme; cioè se nell' asse EF si fa un' altra vite simile a C, e con lei si combina un' altra ruota dentata, e all' asse di tale ruota si applica la resistenza. Poichè allora la po-

po-

tenza applicata al manico GHI della prima vite è nel caso dell'equilibrio alla resistenza applicata all'asse della seconda ruota dentata, come il raggio dell'asse di tale ruota, accresciuto di quello della fune, alla lunghezza GH del manico, moltiplicata pel numero, che ne risulta moltiplicando insieme il numero de' denti d'una ruota pel numero de' denti dell'altra.

AVVERTIMENTO II.

423. Se si vuole adoperare la vite perpetua non per risparmiar forza, ma per accrescere velocità, deve allora la potenza girare non la vite, ma la ruota dentata. Sieno nella macchina rappresentata dalla figura 78 L e M due ruote dentate, la prima orizzontale, che si muove coll'asse verticale CD, e la seconda verticale, che si muove coll'asse orizzontale EF; sieno di più nel cilindro orizzontale EF la vite I combinata co' denti della ruota L, e nel cilindro verticale GH la vite K combinata co' denti della ruota M; e finalmente sia AB una leva orizzontale, al cui estremo A si applichi la potenza. E' chiaro che, se ognuna delle ruote L, e M ha 100 denti, in una rivoluzione della potenza faranno il cilindro EF 100 rivoluzioni, e 'l cilindro GH 10000. E perciò, se GH porterà a uno degli suoi estremi un ordigno da forare, o pure una

Fig. 78.

mola da mulino, produrrà tale ordigno, o tale mola il suo effetto con insigne velocità.

TEOR. XIV.

Fig. 79. 424. *Sia la macchina composta, che rappresenta la fig. 79, nella quale la potenza P gira la leva orizzontale AB, la leva AB muove il cilindro verticale BC fatto a vite in X, da sì fatta vite si muove la ruota dentata L col suo asse DE, e colla picciola ruota dentata M, la ruota M muove la ruota dentata maggiore N col suo asse FG; di più intorno a tale asse s'avvolge in K la fune, che gira per tutte le girelle H, e queste, stando le mobili ligate colla loro cassa alla resistenza R, e le stabili colla loro cassa ligate in I al sostegno immobile YZ, tirano la resistenza R su pel piano inclinato OQ. Dico che in tale macchina vi sarà equilibrio tra la potenza P, e la resistenza R, se l'una sarà all'altra in ragione composta dalla ragione del raggio di M alla lunghezza AB moltiplicata pel numero de' denti della ruota L, dalla ragione del raggio del cilindro K, accresciuto di quello della fune, al raggio di N, dalla ragione dell'unità al numero di tutte le girelle, e dalla ragione del seno dell' angolo d' inclinazione del piano OQ col piano orizzontale al coseno dell'angolo, che forma la direzione, per cui la resistenza è tirata su pel piano OQ, colla direzione dell' i-* *steffo*

stesso piano, o pure, se tali direzioni sono parallele, dalla ragione del detto seno al seno massimo.

DIMOSTRAZIONE.

Si chiami V la potenza equilibrante la resistenza R sul piano inclinato OQ per la direzione, per cui è tirata l'istessa resistenza nella macchina. Sarà V la resistenza, che si deve equilibrare coll'ajuto delle carrucole H. Si chiami in oltre T la potenza equilibrante la resistenza V coll' ajuto delle carrucole H. Sarà T la resistenza, che si deve equilibrare dall'asse FG nella ruota N. Si chiami finalmente S la potenza da applicarsi alla periferia di N per equilibrare la resistenza T applicata al suo asse FG. Sarà S la resistenza, che si deve nella periferia di M equilibrare dalla potenza P coll'ajuto della vite perpetua, per potere tale potenza coll' ajuto dell'intera macchina equilibrare la resistenza R. Essendo dunque la ragione di P: R composta dalle ragioni di P : S, di S : T, di T : V, e di V : R, sarà nel caso dell'equilibrio la ragione di P : R composta dalla ragione del raggio di M alla lunghezza AB moltiplicata pel numero de' denti della ruota L (§ 421), dalla ragione del raggio dell'asse FG, accresciuto di quello della fune, al raggio di N (§ 386), dalla ragione dell'unità al numero delle gi-

relle H (§408), e dalla ragione del seno dell'angolo d'inclinazione del piano OQ col piano orizzontale al coseno dell'angolo, che forma la direzione, per cui è tirata la resistenza R, colla direzione dell'istesso piano OQ, o, se tali direzioni sono parallele, dalla ragione del detto seno al seno massimo (§390). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

425. Quanto s'è insegnato fin qui circa le macchine composte, è più che sufficiente non solamente per poter determinare in qualunque macchina composta la ragione della potenza equilibrante alla resistenza, ma ben anche per comporne quante se ne vogliano, secondo i diversi bisogni. Ci resta solo d'insegnare di quanto si debbono nelle macchine semplici accrescere le potenze equilibranti, acciò divenghino in esse potenze moventi. Perciò soggiugniamo il seguente capo.

CAP.

CAP. V.

Della resistenza, che si ha nelle macchine, derivante dallo stropicciamento d' alcune loro parti; e de' modi di calcolare a un di presso gli accrescimenti da dare nelle macchine semplici alle potenze equilibranti, acciò divenghino potenze moventi.

OSSERVAZIONE.

426. La superficie d' ogni corpo è irregolare, cioè occupata da parti elevate, tramezzate da cavità. Ciò s' osserva col tatto, e coll' occhio nudo, quando il corpo non ha la superficie pulita, e, quando l' ha tale, col microscopio.

COROLLARIO I.

427. Quindi, se un corpo appoggia su d' un altro, nella superficie, in cui essi si toccano insieme, debbono le parti elevate di

uno essere intruse nelle cavità dell'altro. E perciò, se una potenza si sforza di muovere un corpo, che appoggia su d'un altro, con farlo sull'altro strisciare, deve tale potenza, per metterlo in movimento, distrigare le dette parti elevate dalle dette cavità; onde deve o rompere le dette parti elevate, o piegarle, o farle muovere come per piani inclinati, innalzando conseguentemente il corpo, per quant' è la loro altezza. Per la qual cosa deve la detta potenza impiegare tanto della sua forza, in produrre il detto distrigamento di parti, quanto ne bisogna per produrre uno, o più insieme degli detti effetti. Ed ecco la cagione della resistenza derivante dallo stropicciamento.

COROLLARIO II.

428. Essendo tanto più picciole le irregolarità nella superficie d' un corpo, quanto più ella è pulita; sarà tanto più picciola la resistenza derivante dallo stropicciamento, quanto più pulite saranno le superficie, che si stroppiccieranno.

COROLLARIO III.

429. Per diminuire adunque in una macchina quanto più è possibile la detta resistenza, è necessario rendere le parti, che si stro-

pic-

picciano, quanto più è possibile pulite: purchè però la pulitura non giunga al grado di rendere sensibile tra le superficie stropiccianti la forza di coesione, ch'è potentissima nel perfetto contatto. Il che sarebbe aggiugnere nelle macchine nuova resistenza.

AVVERTIMENTO I.

430. Tre casi circa lo stropicciamento possono accadere: 1 che la resistenza derivi dallo spezzamento, o piegamento delle parti elevate; 2 che derivi dal doversi un corpo innalzare sull'altro, per quanto esige l' altezza delle medesime parti elevate; 3 che derivi dallo spezzamento, o piegamento delle parti più elevate, e dall'innalzamento insieme d'un corpo sull'altro, per quanto esige l'altezza delle parti meno elevate. Nel primo caso la detta resistenza deve variare a proporzione che variano 1 la scabrezza delle superficie stropiccianti, 2 la grandezza della superficie, in cui segue lo stropicciamento, e la densità de'corpi; perchè a misura che tali cose variano, varia ancora il numero delle parti elevate; 3 il grado di durezza, o di mollezza delle medesime parti elevate; 4 la forza premente un corpo contro l'altro; perchè a misura che tale forza è maggiore, o minore, più, o meno si debbono le parti elevate immergere nelle cavità, e deve conseguentemente lo spezzamento, o piegamento se-

guire più, o meno verso le radici delle istesse dette parti. Sicchè in tale caso le resistenze derivanti dagli stropicciamenti debbono essere tra loro in ragione composta dalle ragioni delle scabrezze delle superficie stropiccianti, delle grandezze delle medesime superficie, delle densità de' corpi, de' gradi di durezza, o di flessibilità delle parti elevate, e delle forze prementi i corpi l'uno contro dell'altro. Però l'ultima delle dette ragioni componenti può crescere, finchè le parti elevate giungono alla massima immersione nelle cavità, e niente di vantaggio. Nel secondo caso poi o sia maggiore, o minore la superficie, in cui segue lo stropicciamento, sempre l'istessa forza conviene adoperare per innalzare un corpo sull' altro più, o meno, secondo il grado della scabrezza. Onde in tale caso, non contribuendo a variare la resistenza nè la superficie stropicciante, nè la densità de' corpi, nè il grado di durezza, o di flessibilità delle parti elevate, le dette resistenze sono in ragione composta dalle ragioni delle scabrezze delle superficie stropiccianti, e delle forze prementi i corpi l'uno contro dell' altro. Nel terzo caso finalmente contribuiscono a variare la detta resistenza tutte le anzi dette cagioni.

AVVERTIMENTO II.

431. Conosciute le cagioni concorrenti a va-

a variare la resistenza derivante dallo stropicciamento, è facile a comprendere che, per riguardo del calcolo di sì fatte resistenze, non vi si potrà giammai avere esattezza; perchè non è possibile potere con esattezza determinare nè il grado di scabrezza d' una superficie relativamente a quello d' un' altra, nè il grado di durezza, o di flessibilità delle parti d' un corpo relativamente a quello d' un altro. Onde non deve recare maraviglia che dalle tante esperienze fatte circa lo stropicciamento de' corpi non si sia potuto ricavare costante teorica; tanto più che le medesime resistenze debbono soffrire qualche variazione anche per le variabilissime circostanze di caldo, di freddo, di secco, e di umido, le quali producono ne' corpi qualche alterazione. Intanto de' detti casi, che possono accadere ne' stropicciamenti, il primo, e l' ultimo debbono accadere, quando i corpi non hanno parti molto dure, e le superficie non sono pulite, il secondo deve accadere, quando i corpi hanno nelle loro parti considerevole durezza, e le superficie sono pulite. Sicchè nelle macchine ben fatte, dove si stropicciano corpi duri, e con superficie pulite, le resistenze si debbono prendere in ragione composta dalla ragione delle forze prementi, e dalla ragione de' gradi di scabrezza, ovverò composta dalla diretta delle forze prementi, e dalla reciproca de' gradi di puliture: anzi, non essendo de-
ter-

terminabili i gradi di puliture, prenderemo sempre le dette resistenze come proporzionali alle sole forze prementi; e, per non errare in difetto ne' suddetti calcoli, e conseguentemente in svantaggio delle potenze, che debbono muovere le macchine, determineremo le resistenze come convenienti sempre alla pulitura de' legni, che sono i corpi meno suscettibili di pulitura.

ESPERIENZA I.

Fig.80. 432. Si prendano due tavolette di legno LM, AB perfettamente piane, e pulite, delle quali LM sia più grande di AB, e AB abbia in A un picciolo uncino. Si metta LM in sito orizzontale, e su di lei si adatti AB, con ligarvi in A il filo ACD sottile, e forte, che si fa passare per la girella C in modo, che AC sia pure orizzontale. Dall'estremo D di tale filo si sospenda la scudella E. Si metta in oltre qualsivoglia peso su AB; e nella scudella E si vadano a poco a poco mettendo de' piccioli pesi, finchè s'osservi che AB s'incomincia a muovere. Esplorando allora quant'è il peso pendente dall'estremo D del filo, che uguaglia la resistenza derivante dallo stropicciamento di AB contro LM, si trova essere a un di presso il terzo del peso, da cui AB è premuta contro LM. L'istesso si trova

va accadere caricando AB di qualunque altro peso.

ESPERIENZA II.

433. Si tolga il filo ACD, e, caricata la tavoletta AB di qualunque peso, si vada a poco a poco innalzando LM da una parte, formando con tale tavoletta un piano inclinato di maggiore, e maggiore inclinazione, finchè s' osservi che AB incomincia a muoversi pel piano inclinato. Misurando allora l' altezza di tale piano inclinato, si trova essere a un di presso il terzo della lunghezza orizzontale, e conseguentemente la gravità rispettiva, che uguaglia la resistenza derivante dallo stropicciamento, a un di presso un terzo della forza, da cui AB è premuta contro LM.

COROLLARIO.

434. Sicchè ne' legni, quando sono puliti, la resistenza derivante dallo stropicciamento è a un di presso un terzo della forza premente.

AVVERTIMENTO I.

435. Si noti che qui appresso ne' calcoli degli stropicciamenti delle macchine, per avere risultati più tosto maggiori, che mino-

nori de' veri, prenderemo ſempre la reſiſtenza derivante dallo ſtropicciamento un terzo della forza premente, ancorchè ne' metalli, che ſono ſuſcettibili di maggiore pulitura de' legni, ſia ella meno d'un terzo, e ancorchè le parti ſtropiccianti ſieno untate d'olio, o di graſſo, che non ſolamente preſerva i metalli dalla rugine, e i legni dalla putrefazione, ma anche diminuiſce la detta reſiſtenza; e ciò o perchè rende vie più minori le inuguaglianze delle ſuperficie ſtropiccianti, o perchè le rende più facili a ſcorrere l'una ſull' altra colla rotondità delle ſue parti.

AVVERTIMENTO II.

436. Si noti di vantaggio che le iſperienze hanno fatto conoſcere eſſere meno ſempre la detta reſiſtenza in pari circoſtanze, qualora ſi ſtropicciano inſieme corpi di ſpezie diverſe, che quando ſi ſtropicciano inſieme corpi dell'iſteſſa ſpezie. Onde è eſpediente nelle macchine, dove ſi ſtropicciano o legni, o metalli, che ſieno legni, o metalli di ſpezie diverſe; sì perchè le reſiſtenze divengono minori, come anche perchè minori divengono pure i logoramenti. Forſe il detto effetto deriva dall'avere i corpi dell'iſteſſa ſpezie le picciole cavità proporzionate alle parti elevate, e non già i corpi di ſpezie diverſe; e così, immergendoſi le

le parti elevate nelle cavità corrispondenti più ne' corpi dell'istessa spezie; che in quelli di spezie diverse, ne risulta maggiore resistenza in quelli, che in questi.

LEMMA.

437. *Sia il cilindro AB orizzontalmente posto tra due sostegni incavati in archi circolari, e da una fune sia pendente il peso R, sostenuto in equilibrio dalla potenza P, applicata all' altro estremo dell' istessa fune. Determinare a un dipresso l'accrescimento da dare in tale caso alla potenza equilibrante, acciò divenghi potenza movente.* Fig.81.

SOLUZIONE.

Si chiamino F il cercato accrescimento, e Q il peso del cilindro AB. Essendo P in equilibrio con R, sarà $P = R$. Onde la pressione del cilindro contro i sostegni è $= 2R+Q$; e perciò la resistenza conveniente a tale forza premente è a un di presso $= \frac{1}{3}(2R+Q)$. Ma come la potenza deve crescere di $\frac{1}{3}(2R+Q)$, di tanto deve crescere anche la pressione contro i sostegni; onde la resistenza derivante dallo stropicciamento deve anche crescere a un di presso di $\frac{1}{9}(2R+Q)$. Per l'istessa ragione crescerà anche a un di presso di $\frac{1}{27}(2R+Q)$, di $\frac{1}{81}(2R+Q)$, e così procedendo all'infinito. Sicchè l'accrescimento F deve a un di presso uguagliare

re la somma della serie infinita $\frac{1}{3}(2R+Q)$, $\frac{1}{9}(2R+Q)$, $\frac{1}{27}(2R+Q)$, $\frac{1}{81}(2R+Q)$ ec. E' la somma di sì fatta serie infinita $= \frac{1}{2}(2R+Q)$ (§ 147 *del tom.* 3) $= R+\frac{1}{2}Q$. Dunque è a un di presso l'accrescimento cercato $F = R+\frac{1}{2}Q$. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO I.

438. Sicchè la potenza equilibrante in tale caso uguaglia la resistenza, e la potenza movente è a un di presso il doppio della resistenza, aggiuntavi la metà del peso del cilindro. E perciò, se la resistenza R è di 1000 lib., e'l cilindro AB è di lib. 40, la potenza equilibrante P è di lib. 1000, e la movente è di lib. 2020.

COROLLARIO II.

439. Sia l'istesso cilindro AB appoggiato agli sostegni coll'asse EF. Essendo la forza, con cui l'asse EF preme i sostegni $= 2R+Q$; sarà la potenza, che si richiede pendente verticalmente dalla superficie dell'asse, per equilibrare la resistenza derivante dallo stropicciamento, a un di presso $= R+\frac{1}{2}Q$ (§ 437). Dunque la potenza, che si richiede verticalmente pendente dalla superficie del cilindro, per equilibrare l'istessa resistenza, deve essere tanto minore di $R+\frac{1}{2}Q$, quant'è il raggio

gio dell'asse minore del raggio del cilindro. E perciò, chiamando M il raggio del cilindro, e N quello dell'asse, sarà la detta potenza, o sia l'accrescimento da dare alla potenza P, acciò la potenza equilibrante divenghi potenza movente, a un di presso $= \frac{N}{M}$ $(R+\frac{1}{2}Q)$. Per la qual cosa, se la resistenza R è di 1000 lib., il cilindro AB di lib. 40, il raggio dell'asse $\frac{1}{5}$ di quello del cilindro, la potenza equilibrante P è di lib: 1000, e l'accrescimento da darvi, perchè divenghi potenza movente, è a un di presso di lib. 204.

PROBL. XV.

440. *Sia DAFBE una bilancia esatta, che abbia nelle scudelle D ed E pesi uguali. Determinare a un di presso l'accrescimento da dare a uno di tali pesi, acciò possa egli da potenza equilibrante divenire potenza movente.* Fig. 57.

SOLUZIONE.

Si chiamino P ciascuno de' pesi uguali posti nelle scudelle, e p il peso della sola bilancia senza la trutina. Premendo, qualora la bilancia si tiene sospesa, il piccolo asse C dalla parte inferiore la trutina col peso $2P+p$; sarà la potenza, che si richiede pendente verticalmente dalla superficie del detto picciolo asse, per equilibrare la resistenza derivante dallo stropicciamento dell'istesso asse

asse colla trutina a un di presso $= P+\frac{1}{2}p$ (§ 437). E perciò la potenza, che si richiede in una delle scudelle a un di presso, per equilibrare la medesima resistenza, sarà tanto minore di $P+\frac{1}{2}p$, quant' è il raggio del picciolo asse minore della lunghezza d' un braccio della bilancia. Sicchè, chiamando M la lunghezza d'un braccio, e N il raggio del picciolo asse, sarà la detta potenza, o sia il cercato accrescimento a un di presso $= \frac{N}{M}(P+\frac{1}{2}p)$. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO.

441. Quindi, se il peso P è di lib. 20, il peso p di lib. 4, e 'l raggio del picciolo asse è $\frac{1}{88}$ della lunghezza d'un braccio; sarà a un di presso il cercato accrescimento $\frac{22}{88}$, o $\frac{1}{4}$ di libbra. Sicchè in tale caso non s'interrompe l'equilibrio nella bilancia, se in una delle scudelle non s'aggiugne a un di presso $\frac{1}{4}$ di libbra.

PROBL. XVI.

Fig. 59. 442. *Sia la carrucola stabile ABC, con cui la potenza P sostiene coll' ajuto d' una fune la resistenza R. Determinare a un di presso l' accrescimento da dare alla potenza P, acciò da potenza equilibrante divenghi potenza movente.*

So-

SOLUZIONE.

Essendo P=R (§379); sarà, chiamando p il peso della girella, e della fune, la pressione nella parte superiore dell' asse = 2R+p; onde la potenza, che si richiede verticalmente pendente dalla superficie dell' asse, per equilibrare la resistenza derivante dallo stropicciamento, sarà $= R+\frac{1}{2}p$; e per conseguenza, chiamando M il raggio della girella, e N quello dell' asse, l' accrescimento cercato sarà $= \frac{N}{M} \left[R+\frac{1}{2}p \right]$. Ch' è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO.

443. Quindi, se il raggio della girella contiene 10, 20, 30 volte, ec. quello dell' asse, il detto accrescimento sarà $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$, ec. della resistenza, accresciuta della metà del peso della girella, e della fune. Per la qual cosa le girelle stabili sono tanto più vantaggiose, quanto più grandi sono i loro diametro.

P R O B L. XVII.

444. *Sia la carrucola mobile ABC, con cui la potenza P sostiene coll' ajuto della fune* Fig.60.

 DABP,

DABP, supposti i tratti DA, BP paralleli, la resistenza R. Determinare a un di presso l'accrescimento da dare alla potenza P, acciò da potenza equilibrante divenghi potenza movente.

SOLUZIONE.

Essendo in tale caso la pressione nella parte inferiore dell'asse uguale al peso di R, e della cassa della carrucola; se tale peso si chiamerà Q, sarà la potenza, che si richiede verticalmente pendente dalla superficie dell'asse, per equilibrare la resistenza derivante dallo stropicciamento, a un di presso $=\frac{1}{2}Q$ (§ 437). E perciò, chiamando M il raggio della girella, e N quello dell'asse, sarà l'accrescimento cercato a un di presso $= \frac{N}{M} \times \frac{1}{2}Q$. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO

445. Quindi, se il raggio della girella contiene 10, 20, 30 volte, ec. quello dell'asse, sarà il detto accrescimento a un di presso $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{60}$, ec. di Q, cioè del peso della resistenza R, e della cassa della carrucola. Per la qual cosa anche le girelle mobili sono tanto più vantaggiose, quanto più grandi sono i loro diametri.

PRO-

PROBL. XVIII.

446. *Determinare per riguardo dell' asse nella ruota l' accrescimento da dare alla potenza equilibrante, acciò da potenza equilibrante divenghi potenza movente.*

SOLUZIONE.

Contrassegnino ABCD la ruota, EFG il cilindro; P la potenza equilibrante applicata per la tangente HP, e R la resistenza applicata per la tangente RE del cilindro. S' intendano prolungate RE, PH, finchè s' unischino in I; e, tirata OL parallela ad EI, si cali da H su EI la perpendicolare HK. Sarà la potenza equilibrante $P = \frac{R \times OE}{OH}$ (§386). S' esprima sì fatta potenza con HI; equivalerà ella alle due espresse da IK, KH (§ 69). Or di queste due forze la espressa da IK solamente preme l' asse contro i sostegni. Sicchè l' intera potenza equilibrante sta alla forza, con cui ella preme l' asse, come HI : IK=HL : LV=OH : HV, ovvero, posto il seno massimo $=$T, come T : *sen.* HOB. E perciò la forza, con cui la potenza preme l' asse contro i sostegni, è $= \frac{sen. HOB \times}{T \times} \frac{R \times OE}{OH}$; e

Fig. 82

T 2 con-

conseguentemente l'intera pressione dell'asse contro i sostegni è $= R + \frac{\textit{sen. } HOB \times R \times OE}{T \cdot OH}$. Per la qual cosa la potenza, che si richiede verticalmente pendente dalla superficie dell'asse, per equilibrare la resistenza derivante dallo stropicciamento, è a un di presso $= \frac{1}{2} \left[R + \frac{\textit{sen. } HOB}{T} \times \frac{R \times OE}{OH} \right]$ (§437). E perciò, chiamando M il raggio della ruota, e N quello dell'asse, sarà l'accrescimento cercato $= \frac{N}{2M} \left[R + \frac{\textit{sen.} HOB}{T} \times \frac{R \times OE}{OH} \right]$. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO I.

447. Essendo il *sen.* BOH tanto più picciolo per rispetto del seno massimo, quanto più l'angolo BOH si fa acuto, o ottuso; sarà il detto accrescimento tanto più picciolo, quanto più il punto H s'avvicinerà al punto B, o al punto D.

CO-

COROLLARIO II.

448. Se il punto H cade in B, o in D, diventa allora il *sen.* BOH = o, e conseguentemente il detto accrescimento = $\frac{N}{M} \times \frac{1}{2} R$. Se poi il punto H cade in C, allora diventa il *sen.* BOH = T, e conseguentemente il detto accrescimento = $\frac{N}{2M} \left[R + \frac{R \times OE}{OH} \right]$. Se finalmente il punto H cade in A; tirando la potenza verso basso, sarà il detto accrescimento pure = $\frac{N}{2M} \left[R + \frac{R \times OE}{OH} \right]$; tirando poi verso sopra, il detto accrescimento sarà = $\frac{N}{M} \left[R - \frac{R \times OE}{OH} \right]$.

COROLLARIO III.

449. Quindi il detto accrescimento è massimo, quando la potenza è applicata in A, o in C, e tira verso la parte della resistenza R, e minimo, quando la potenza è applicata in B, o in D. Quando poi la potenza si applica in A, o in C, e tira, o spin-

o ſpinge verſo la parte oppoſta alla reſiſtenza, allora il detto accreſcimento in A, o in C è il minimo. E perciò per riguardo dell' aſſe nella ruota la potenza ſi applica col maſſimo vantaggio in A, o in C, ſe in A, o in C può tirare, o ſpingere la ruota dalla banda oppoſta alla direzione della reſiſtenza; ſe poi in A, o in C la potenza non può agire, che tirando verſo la banda della reſiſtenza, allora, per applicarla col maſſimo vantaggio, biſogna applicarla in B, o D.

COROLLARIO IV.

450. Sicchè, ſe ABCD rappreſenta la periferia, che deſcrive la mano, che gira un manico ſecondo la direzione delle lettere A, B, C, D, la mano in A farà la minima forza, in C la maſſima, e in B, o D farà forza mezzana.

COROLLARIO V.

451. Eſſendo finalmente il detto accreſcimento $= \frac{N}{2M} \left(R + \frac{\textit{ſen.}\,BOH}{T} \times \frac{R \times OE}{OH} \right)$; quanto più il raggio della ruota ſarà maggiore per riſpetto di quello dell' aſſe, tanto meno ſarà il detto accreſcimento. Sicchè l' aſſe nella ruota è più vantaggioſa, quanto più

più il raggio della ruota è maggiore di quello dell' asse.

PROBL XIX.

452. *Sia il corpo D sul piano inclinato AB. Determinare a un di presso l' accrescimento da dare alla potenza equilibrante per la direzione DE parallela ad AB, acciò divenghi ella potenza movente.* Fig.83.

SOLUZIONE.

Si chiami G la gravità assoluta del corpo D. Essendo AB : BC = G alla forza, con cui il corpo preme AB; sarà tale forza premente $= \frac{BC}{AB} \times G$. Onde la resistenza derivante dallo stropicciamento, e conseguentemente l' accrescimento cercato sarà a un di presso $= \frac{BC}{AB} \times \frac{1}{3}G$. Ch' è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO.

453. Essendo in tale caso la potenza equilibrante $= \frac{AC}{AB} \times G$ (§390); sarà in

tale caſo la potenza movente $= \frac{AC}{AB} \times G + \frac{BC}{AB} \times \frac{1}{3} G = \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right) \frac{1}{3} G$.

PROBL. XX.

454. *Sia l' iſteſſo corpo D ſul piano inclinato AB. Determinare a un di preſſo l' accreſcimento da dare alla potenza equilibrante per qualunque direzione DO, acciò ella divenghi potenza movente.*

SOLUZIONE.

Si chiami G la gravità aſſoluta del corpo D. Eſprima DO la potenza movente per la direzione DO; equivalerà ella, fatto il rettangolo FE, alle due eſpreſſe da DE, DF, delle quali DE eſprimerà la potenza movente per la direzione DE, e DF eſprimerà la forza, con cui la detta potenza agente per DO premerà il piano AB; onde ſarà la potenza eſpreſſa da DE $= \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right) \frac{1}{3} G$ (§ *prec.*). Ed eſſendo ED : DF, ovvero OF : FD, poſto il ſeno maſſimo $= R$, come R : *tang.* DOF, ſarà la detta forza premente $= \frac{tang.\ DOF}{R} \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right) \frac{1}{3} G$, e con-

e conseguentemente la resistenza derivante dallo stropicciamento, che cagiona sì fatta forza premente, sarà $= \frac{tang.\ DOF}{R} \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right)$ $\frac{1}{9}G$. E' anche la resistenza derivante dallo stropicciamento, che cagiona il peso del corpo $= \frac{BC}{AB} \times \frac{1}{3}G$ (§ 452). Sicchè l'intera resistenza derivante dallo stropicciamento in tale caso, o sia l'accrescimento cercato è $= \frac{BC}{AB} \times \frac{1}{3}G + \left(\frac{tang.\ DOF}{R} \right) \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right)$ $\frac{1}{9}$ G. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO I.

455. Se DO è parallela a BC, nel qual caso è l'angolo DOF = ABC; sarà R : *tang.* DOF = BC : AC, e conseguentemente $\frac{tang.\ DOF}{R} = \frac{AC}{BC}$. Sicchè in tale caso l'accrescimento cercato è $= \frac{BC}{AB} \times \frac{1}{3}G +$ $\left(\frac{3AC+BC}{AB} \right) \frac{AC}{BC} \times \frac{1}{9}G$.

CO-

COROLLARIO II.

456. Se l'angolo DOF sarà di 45° ; perchè in tale caso è *tang.* DOF $= R$, sarà l'accrescimento cercato $= \frac{BC}{AB} \times \frac{1}{3} G + \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right) \frac{1}{3} G = \left(\frac{4BC+3AC}{AB} \right) \frac{1}{3} G$.

PROBL. XXI.

457. *Contrassegni ABC un cuneo da introdursi sotto il corpo D, per innalzarlo sul piano orizzontale* BC *con una potenza agente sulla base AC. Determinare a un di presso l'accrescimento da dare alla potenza equilibrante, acciò divenghi ella potenza movente.*

SOLUZIONE.

Facendo azione la potenza su AC per innalzare il corpo D sul piano orizzontale BC, è l'istesso come se il corpo D fosse tirato pel piano inclinato AB da una potenza agente per la direzione parallela a BC. Onde l'accrescimento da dare alla potenza equilibrante a cagione dello stropicciamento del corpo col piano AB, chiamando G la gravità assoluta del corpo, o sia il suo

suo peso, è $= \frac{BC}{AB} \times \frac{1}{3} G + \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right) \frac{AC}{BC} \times \frac{1}{3} G$ (§455). V'è anche lo stropicciamento della superficie BC del cuneo contro del corpo, su cui deve egli scorrere; e la resistenza derivante da tale stropicciamento, essendo la superficie BC premuta dal peso del corpo D, e dal peso del cuneo istesso, e, chiamando P il peso del cuneo, è a un di presso $= \frac{1}{3} G + \frac{1}{3} P$. Dunque l'intera resistenza derivante in tale caso dallo stropicciamento, o sia l'accrescimento cercato è a un di presso $= \frac{BC}{AB} \times \frac{1}{3} G + \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right) \frac{AC}{BC} \times \frac{1}{3} G + \frac{1}{3} G + \frac{1}{3} P$. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO.

458. Essendo in tale caso la potenza equilibrante $= \frac{AC}{BC} \times G$; sarà la potenza movente a un di presso $= \frac{AC}{BC} \times G +$

BC

$$\frac{BC}{AB} \times \tfrac{1}{3} G + \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right) \frac{AC}{BC} \times \tfrac{1}{9} G +$$

$\frac{2}{3}$ G + $\frac{1}{3}$ P. E perciò, posti G = 500 rot., P = 30 rot., AB = 5 pal., BC = 4 pal., e AC = 3 pal., sarà la potenza equilibrante di rot. 375, e la potenza movente a un di presso di rot. 793 $\frac{1}{3}$, vale a dire più del peso da innalzare.

PROBL. XXII.

459. *Determinare a un di presso in una vite l'accrescimento da dare alla potenza equilibrante, acciò divenghi ella potenza movente.*

SOLUZIONE.

Col girare la vite per innalzare, o premere qualunque corpo, si obbliga il dente della vite a scorrere tra due piani inclinati, rappresentati dagli due lati del solco spirale della madrevite. Sicchè la resistenza derivante dallo stropicciamento nella vite è il doppio di quella, che sarebbe, se la resistenza si dovesse muovere per un piano inclinato, che avesse per altezza la porzione del lato, che tramezza tra due denti della vite, per base la periferia del cilindro, in cui è la vite, e per lunghezza un giro della vite. Sicchè, supposto denotare AC la detta porzione del lato, che tra-

tramezza tra un dente, e l'altro della vite, BC la detta periferia, e AB un giro dell' istessa vite, e posta la resistenza, che fa il corpo, che si deve innalzare, o premere = G, sarà la resistenza derivante dallo stropicciamento a un di presso $= \frac{BC}{AB} \times \frac{2}{3} G + \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right) \frac{AC}{BC} \times \frac{2}{7} G$ (§455).
Ma la potenza è applicata all'estremo della leva, che gira la vite; onde, chiamando L la periferia, che descrive la potenza, deve essere il cercato accrescimento tanto minore della determinata resistenza, quant' è AC minore di L. E perciò l'accrescimento cercato sarà a un di presso $= \frac{AC}{L} \left(\frac{BC}{AB} \times \frac{2}{3} G + \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right] \frac{AC}{BC} \times \frac{2}{7} G \right]$. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO.

460. Essendo la potenza equilibrante $= \frac{AC}{L} \times G$; sarà a un di presso la poten-

za movente $= \frac{AC}{L} \times G + \frac{AC}{L} \left(\frac{BC}{AB} \times \frac{2}{3} G + \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right) \frac{AC}{BC} \times \frac{2}{9} G \right) = \frac{AC}{L} \left[G + \frac{BC}{AB} \times \frac{2}{3} G + \left[\frac{3AC+BC}{AB} \right] \frac{AC}{BC} \times \frac{2}{9} G \right]$.

Se dunque sono il raggio della vite di onc. 2, la porzione del lato, che tramezza tra due denti d'un'oncia, la lunghezza della leva di pal. 5, e la resistenza, che fa il corpo, che si deve innalzare, o premere di rot. 10000. Essendo $AC = 1$ onc., $BC = 12.56$, e conseguentemente $AB = 12.6$, $L = 188.56$, e $G = 10000$ rot.; saranno la potenza equilibrante $\frac{AC}{L} \times G = 53$ rot., e l'accrescimento da dare alla potenza equilibrante, acciò divenghi potenza movente, a un di presso $\frac{AC}{L} \left(\frac{BC}{AB} \times \frac{2}{3} G + \left(\frac{3AC+BC}{AB} \right) \frac{AC}{BC} \times \frac{2}{9} G \right) = 36 \frac{1}{3}$ di rot.

Onde la potenza movente è a un di presso di rot. 53+37, o sia di rot. 90.

AV-

AVVERTIMENTO.

461. Avendo già insegnato i modi di calcolare a un di presso gli accrescimenti da dare in tutte le macchine semplici alle potenze equilibranti, acciò divenghino potenze moventi, ci dispensiamo di fare l'istesso per riguardo delle macchine composte; potendo ognuno, che ha compreso quanto s'è insegnato in questo capo, da se calcolare per riguardo di qualunque macchina composta le forze prementi gli assi delle macchine semplici, dalle quali sarà ella composta, le resistenze derivanti dagli stropicciamenti in esse, e finalmente l'accrescimento da dare alla potenza equilibrante, per potere con tale accrescimento equilibrare tutte le resistenze derivanti dagli stropicciamenti, che accadono in tutte le dette macchine semplici componenti.

Fine del Libro secondo.

Tav. I
Fig. 2
A
E
F
O
B
G
C
C
D
E
H
Fig. 3
P
Q
C
A
B
F
G
I
B
M
C
H
G
I
D
O

Tav. II

B
C
D
O
Fig. 6
A

y. 9

B

B

y. 12

C

Tav.
Fig. 14
Fig. 16
Fig. 18

Tav. IV.
L
I
D
E
L
M
T
F
T
M
P
C
O
N
R
F
V
L
B
I
I
D
E
M
H
F
G
M
R
C
P
O
N
P
A
H
F
Q
K
S

Tav. V.
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24

Tav. VI
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 29
P
K H D
R
G Q
T
M
B
F
S
C
P
N
A
Q
R
L
T
S
N
R
B D
G
E
M
F
P
C
N X
A
Q
V
D
G
E
B
C
F
O
B
Q
D

Tav. I
Fig. 32
Fig. 34
Fig. 36

Fig. 37
G
D
B
S
F
R
Fig. 38
A
O
B
Fig. 40
A
F
E
Q
m
p
M
P
R
B
C
D
O
G
C
H
D
Fig. 42
B
E
O
A
D
C
B
D
Fig. 43
A
B
E
O
S
Q
R
L
P
N
M
D
Fig. 44
D
P
C

Tav. IX
Fig. 46
C
L
Q
M
A
P
B
F
G
H
K
N
I
O
E
D
Fig. 48
D
Fig. 47
P
Q
C
E
O
A
B
B
Fig. 50
E
C
A
O
B
P
D
P
R

Tav. X
51
Fig. 52
A
M
C
K
B
F
L
H
R
E
G
I
P
G
I
B
K
P
G
I
E
Fig. 54
C
K
B.
M
A
D
H
L
P
F
R
H
D
G
Fig. 56
D
C
B
F
E
B
E
E
Fig. 58
A
F
B
C
O
D

Tav. XI.
Fig. 61
C
K
M
L
A
N
O
B
E
F
G
S
D
R
H
I
P
P
E
D
Fig. 6
A
O
F
C
B
P
Fig. 64
O
A
C
D
B
E
F
Alojo R. Inc.

Tav. XII.
Fig. 65
D
H
C
G
A
E
B
P
L
K
Fig. 68
Fig. 69
P
P
R
R
R

Tav.XIII
Fig. 72
Fig. 73
Fig. 74
N
O
K
D
C
H
I
P
B
A
E
G
F
K
R
L
H
M
Q

Tav.XIV.
Fig.77
NAPOLI

Tav. XV.
Fig. 80
Fig. 82